Н.А.Карпенко

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Пусть характеристика поля F не равна 2; φ - квадратичная форма над полем F размерности n; X_φ - квадрика в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}_F$, определенная уравнением $\varphi=0$. Исследуются два инварианта квадратичной формы φ: кольцо Чжоу CH^*X_φ квадрики X_φ и градуированное кольцо $G^*K_0(X_\varphi)$, ассоциированное с топологической фильтрацией на кольце Гротендика $K_0(X_\varphi)$. Кольцо CH^*X_φ вычисляется для всех квадратичных форм, размерность которых не превосходит 6; кольцо $G^*K_0(X_\varphi)$ - для форм размерности ≤ 7 и 8-мерных квадратичных форм определителя 1. Для квадратичной формы произвольной размерности вычисляются компоненты CH^2X_φ и $G^{n-3}K_0(X_\varphi)$. Важную роль в получении этих результатов играет вычисление Суона K-теории квадрик (Swan R. G. K-theory of quadric hypersurfaces // Ann. Math. 1985. Vol.122, N 1, P.113-154).

В начале 80-х годов американским математиком Р.Суоном были сформулированы две проблемы относительно квадратичных гиперповерхностей в проективном пространстве: первая - вычисление их K-теории, вторая - вычисление кольца Чжоу CH^* (градуированного кольца циклов по модулю рациональной эквивалентности). Первая из этих тесно связанных между собой задач была решена самим Суоном в 1985 г. [1]. При этом им было отмечено, что вторая проблема по-прежнему остается открытой. Между тем изучение гомоморфизма норменного вычета [2, 3] - бурно развивающееся в последнее время направление в алгебраической K-теории - потребовало проведения некоторых вычислений в группах Чжоу квадрики. Это усилило интерес ко второй проблеме Суона и послужило поводом настоящей работы.

Пусть X - проективная квадрика над полем $F(\mathrm{char}F\neq2)$, заданная

Ключевые слова: квадратичная форма, алгебра Клиффорда, формы Пфистера, квадрика, кольцо Гротендика и топологическая фильтрация, K-когомологии, кольцо Чжоу, спектральная последовательность Брауна-Герстена-Квиллена.

невырожденной квадратичной формой φ. Наряду с CH^*X рассмотрим еще один инвариант формы φ - градуированное кольцо $G^*K(X)$, ассоциированное с топологической фильтрацией на группе Гротендика $K(X)=K_0'(X)=K_0(X)$ квадрики. Кольца CH^*X и $G^*K(X)$ весьма близки (см., например, следствие (4.5)), и вычисление групп $G^pK(X)$ можно рассматривать как первый этап в вычислении групп CH^pX.

К основным результатам работы о кольце Чжоу относятся полное его вычисление для квадрик размерности не выше 4 (§ 5) и вычисление компоненты CH^2 для произвольной квадрики (§ 6). Из утверждений о $G^*K(X)$ заслуживают внимания теоремы из § 3, дающие, в частности, формулу для порядка кручения в $G^*K(X)$; если $\varphi\notin I^2(F)$, эта формула наиболее проста: порядок кручения в $G^*K(X)$ равен $2^{s(\varphi)-i(\varphi)}$, где $s(\varphi)$ - число, связанное с алгеброй Клиффорда формы (3.3), $i(\varphi)$ - индекс Витта. Кроме того, в § 8 проведено вычисление $G^*K(X)$ для квадрик размерности 5 и одного класса 6-мерных квадрик; в § 7 вычислена компонента $G^{d-1}K(X)$, где $d=\dim X$, для произвольной квадрики.

Перечислим основные обозначения и соглашения статьи. Для многообразия X над произвольным полем F через $K_p(X)$, $K_p'(X)$ обозначаем K-группы и K'-группы Квиллена [4], $K_p(F)=K_p(\mathrm{Spec}\ F)$. Простым циклом на X называем любое неприводимое замкнутое подмножество, циклом - элемент свободной абелевой группы, порожденной простыми циклами. Для точки $x\in X$ через $F(x)$ обозначаем ее поле вычетов; поле рациональных функций на X обозначаем $F(X)$. Мы будем в основном работать с неприводимыми и неособыми многообразиями. Однако на промежуточных этапах некоторых вычислений будут появляться особые квадрики (§ 2,4) и даже приводимые (2.1). Поэтому основные факты о K-когомологиях в § 1 приводятся для произвольных многообразий. Начиная с § 2, буквой X, если это специально не оговорено, обозначается проективная квадрика, заданная невырожденной квадратичной формой φ. Для поля F, характеристика которого не равна 2, $I(F)$ обозначает идеал четномерных форм в кольце Витта $W(F)$ квадратичных форм над F; $\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ - квадратичная форма $a_1X_1^2+a_2X_2^2+\dots+a_nX_n^2$; $D(\varphi)$ - множество ненулевых значений формы φ; $d_1\varphi=(-1)^{n(n-1)/2}\cdot\det\varphi$, где $n=\dim\varphi$, - дискриминант; $i(\varphi)$ - индекс Витта; $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle=\langle 1,-a_1\rangle\otimes\dots\otimes\langle 1,-a_n\rangle$ - n-форма Пфистера; для двух квадратичных форм φ_1 и φ_2 пишем $\varphi_1\sim\varphi_2$ и говорим „φ_1 пропорциональна φ_2", если $\varphi_1\cong c\varphi_2$ при некотором $c\in F^*$ (пропорциональные квадратичные формы определяют одну и ту же квадрику). Необходимые определения и факты из теории квадратичных форм можно найти в [5].

§ 1. *K*-когомологии

В этом параграфе рассматриваются многообразия над некоторым фиксированным полем *F*. Под многообразием понимается приведенная отделимая схема конечного типа над *F*, являющаяся *равноразмерной* (размерности всех неприводимых компонент одинаковы). Перечислим некоторые более или менее известные факты о *K*-когомологиях.

(1.1). Спектральная последовательность Брауна-Герстена-Квиллена (спектральная BGQ-последовательность). Для произвольного многообразия *X* в [4] построена каноническая спектральная последовательность когомологического типа, называемая спектральной BGQ-последовательностью, $E_1^{p,q}(X)=\coprod_{x\in X^p} K_{-p-q}(F(x)) \Longrightarrow K'_{-p-q}(X)$, где через X^p обозначено множество точек многообразия *X*, имеющих коразмерность *p* (под размерностью точки понимается размерность ее замыкания). Ассоциированная фильтрация на $K'_*(X)$ совпадает с фильтрацией по коразмерности носителя (также называемой топологической фильтрацией). Отметим, что спектральная *BGQ*-последовательность контравариантна относительно плоских морфизмов. Более того, если $X=\varprojlim X_i$, где $i\longmapsto X_i$ - направленная проективная система многообразий с плоскими аффинными морфизмами, то спектральная последовательность для *X* является индуктивным пределом спектральных последовательностей для X_i.

Для произвольного многообразия *X* обозначим через $H^p(X,K_q)$ группу

$$H\left(\coprod_{x\in X^{p-1}} K_{q-p+1}(F(x)) \longrightarrow \coprod_{x\in X^p} K_{q-p}(F(x)) \longrightarrow \coprod_{x\in X^{p+1}} K_{q-p-1}(F(x))\right)=$$

$$= E_2^{p-q}(X).$$

Пусть $d=\dim X$. Группу $H^p(X,K_p)$ будем называть группой Чжоу коразмерности *p* (размерности *d-p*) и обозначать CH^pX (или $CH_{d-p}X$); $CH^*X=\coprod_{p=0}^{d} CH^pX$ - градуированная группа Чжоу.

(1.2). Функториальные свойства. Любой плоский морфизм $f:X\longrightarrow Y$ индуцирует морфизм спектральных BGQ-последовательностей и, следовательно, гомоморфизм групп $f^*:H^p(Y,K_q)\longrightarrow H^p(X,K_q)$. Пусть теперь $f:X\longrightarrow Y$ - собственный морфизм. Получаем гомоморфизм комплексов (где $n=\dim Y-\dim X$)

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in X^p} K_{q-p}(F(x)) & \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in X^{p+1}} K_{q-p-1}(F(x)) & \longrightarrow \ldots, \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \longrightarrow & \coprod\limits_{y\in Y^{p+n}} K_{q-p}(F(y)) & \longrightarrow & \coprod\limits_{y\in Y^{p+n+1}} K_{q-p-1}(F(y)) & \longrightarrow \ldots,
\end{array}$$

который переводит элементы группы $K_{q-p}(f(x))$ в $K_{q-p}(F(f(x)))$ при помощи отображения нормы $N_{F(x)/F(f(x))}$, если $\dim x = \dim f(x)$, и в ноль в противном случае. Этот гомоморфизм комплексов определяет гомоморфизм групп $f_*: H^p(X,K_q) \longrightarrow H^{p+n}(X,K_{q+n})$.

В частности, пусть E/F - произвольное расширение, $X_E = X \otimes_F E$ и $f: X_E \longrightarrow X$ - проекция. Морфизм f является плоским; индуцированный им гомоморфизм f^* обозначается $\mathrm{res}_{E/F}$. Если расширение E/F конечно, то морфизм f собственный (точнее, конечный); возникающий гомоморфизм f_* обозначается $N_{E/F}$. Композиция $N_{E/F} \circ \mathrm{res}_{E/F}$ совпадает с умножением на $[E:F]$.

(1.3). Две точные последовательности, которые будут сейчас построены, являются основными вычислительными средствами.

(1.3.1). Вырезание. Пусть $i: Y \hookrightarrow X$ - замкнутое вложение коразмерности n, $j: U = X \setminus Y \hookrightarrow X$. Для каждого p множество X^p является дизъюнктным объединением множеств U^p и Y^{p-n}. Возникающая точная последовательность комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in Y^{p-n}} K_{q-p}(F(x)) & \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in X^p} K_{q-p}(F(x)) & \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in U^p} K_{q-p}(F(x)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

индуцирует точную последовательность групп когомологий

$$\ldots \longrightarrow H^{p-n}(Y,K_{q-n}) \xrightarrow{i_*} H^p(X,K_q) \xrightarrow{j^*} H^p(U,K_q) \longrightarrow H^{p-n+1}(Y,K_{q-n}) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

В частности, для групп Чжоу получаем $CH^{p-n}Y \xrightarrow{i_*} CH^pX \xrightarrow{j_*} CH^pU \longrightarrow 0$.

(1.3.2). Расслоение над кривой. Пусть $\pi: X \longrightarrow Y$ - плоский морфизм многообразий и $\dim Y = 1$. Обозначим через θ общую точку кривой Y. Для каждого p множество X^p есть дизъюнктное объединение множеств $(X_\theta)^p$ и $\cup_{y\in Y^1}(X_y)^{p-1}$ (X_y - слой π над точкой y). Возникающая короткая точная последовательность комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \coprod\limits_{y\in Y^1}\Big(\coprod\limits_{x\in (X_y)^{p-1}} K_{q-p}(F(x))\Big) & \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in X^p} K_{q-p}(F(x)) & \longrightarrow & \coprod\limits_{x\in (X_\theta)^p} K_{q-p}(F(x)) & \longrightarrow & 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

левый член которой есть прямая сумма комплексов, дает точную последовательность когомологий:

$$\ldots \longrightarrow \coprod_{y\in Y^1} H^{p-1}(X_y, K_{q-1}) \xrightarrow{\Sigma(i_y)_*} H^p(X,K_q) \xrightarrow{j^*} H^p(X_\theta, K_q) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \coprod_{y\in Y^1} H^p(X_y, K_{q-1}) \longrightarrow \ldots,$$

где i_y - замкнутое вложение $X_y \hookrightarrow X$, $j:X_\theta \longrightarrow X$ - естественный морфизм из слоя над общей точкой, являющийся плоским. В частности, для групп Чжоу получаем точную последовательность

$$\coprod_{y\in Y^1} \mathrm{CH}^{p-1}X_y \longrightarrow \mathrm{CH}^pX \longrightarrow \mathrm{CH}^pX_\theta \longrightarrow 0.$$

(1.4). Гомотопическая инвариантность. Пусть $\pi:X\longrightarrow Y$ - векторное расслоение. Тогда отображение $\pi^*:H^p(Y,K_q)\longrightarrow H^p(X,K_q)$ является изоморфизмом. В частности, для аффинного пространства $\mathbb{A}^n_F$ получаем

$$H^p(\mathbb{A}^n_F, K_q) \cong H^p(\mathrm{Spec}\, F, K_q) = \begin{cases} 0, \text{ если } p>0; \\ K_q(F), \text{ если } p=0. \end{cases}$$

(1.5). Гладкие многообразия. Пусть $\mathcal{K}_q=\mathcal{K}_q(X)$ - пучок на многообразии X, ассоциированный с предпучком $U \longmapsto K_q(U)$. Если X неособо, то группы когомологий $H^p(X,\mathcal{K}_q)$ пучка $\mathcal{K}_q$ канонически изоморфны группам $H^p(X,K_q)$.

(1.5.1). Мультипликативная структура. Умножение в K-теории определяет спаривание пучков $\mathcal{K}_q\times\mathcal{K}_{q'}\longrightarrow \mathcal{K}_{q+q'}$, и, следовательно, групп когомологий $H^p(X,\mathcal{K}_q)\times H^{p'}(X,\mathcal{K}_{q'})\longrightarrow H^{p+p'}(X,\mathcal{K}_{q+q'})$. Это спаривание определяет на группе $\coprod_{p,q\geq 0} H^p(X,\mathcal{K}_q)$ структуру биградуированного (коммутативного ассоциативного) кольца. В частности, группа Чжоу CH^*X становится градуированным кольцом.

(1.5.2). Гомоморфизм обратного образа, построенный в (1.2) для плоского морфизма, можно определить для произвольного морфизма $f:X\longrightarrow Y$ в случае гладких многообразий: $f^*:H^p(Y,\mathcal{K}_q)\longrightarrow H^p(X,\mathcal{K}_q)$ индуцирован естественным морфизмом пучков $\mathcal{K}_q(Y)\longrightarrow f_*(\mathcal{K}_q(X))$. При этом $f^*:H^*(Y,\mathcal{K}_*)\longrightarrow H^*(X,\mathcal{K}_*)$ - гомоморфизм колец. Если морфизм f собственный, то f_* и f^* связаны формулой проекции.

(1.6). ***К*-когомологии проективного пространства** $\mathbb{P}^n$ легко вычислить, используя точную последовательность (1.3.1) для тройки $\mathbb{P}^{n-1}\hookrightarrow\mathbb{P}^n\hookleftarrow\mathbb{A}^n$. Приведем описание кольца Чжоу: гомоморфизм колец $\mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})\longrightarrow\mathrm{CH}^*\mathbb{P}^n$, переводящий h в класс гиперплоскости, является изоморфизмом.

§ 2. Простейшие сведения о группах Чжоу проективных квадрик

С этого момента будут рассматриваться только поля характеристики, не равной 2. Пусть φ - невырожденная квадратичная форма над полем F размерности $d+2$ $(d\geq 1)$, m - целая часть числа $(d+1)/2$. В дальнейшем всегда (кроме специально оговоренных случаев) буквой X будет обозначаться квадрика в проективном пространстве $\mathbb{P}^{d+1}_F$, определенная формой φ (в частности, $\dim X=d$). Многообразие X неособо, поскольку φ невырождена; $CH^0X=\mathbb{Z}\cdot[X]$, так как X неприводимо. Пусть $h\in CH^1X$ - класс гиперплоского сечения (более точно, h - обратный образ гиперплоскости относительно вложения $X\hookrightarrow\mathbb{P}^{d+1}$).

(2.1). Вычисление групп Чжоу в случае максимально расщепленной формы. Пусть $\varphi=X_0X_1+\ldots$, Y - сечение квадрики X гиперплоскостью $X_0=0$. Тогда Y - особая квадрика на единицу меньшей размерности, и $U=X\setminus Y\cong\mathbb{A}^d$. Точная последовательность вырезания сводит вопрос о группах Чжоу квадрики X к вопросу о группах Чжоу Y. Продолжая действовать подобным образом, сводим задачу к вычислению групп Чжоу проективного пространства (см. (1.6)). Приведем окончательный ответ. Пусть сперва d нечетно, $\varphi=X_0X_1+\ldots+X_{d-1}X_d+X^2_{d+1}$. Квадрика X содержит $(m-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^{m-1}$ (определяемое, скажем, уравнениями $X_0=X_2=X_4=\ldots X_{d+1}=0$) и вместе с ним проективные пространства всех меньших размерностей; пусть $l_p\in CH_pX$ - класс $\mathbb{P}^p\subset X$. Тогда $CH^pX=\mathbb{Z}\cdot h^p$, $CH_pX=\mathbb{Z}\cdot l_p$ для $p<m$. Если же d четно, $\varphi=X_0X_1+\ldots+X_{d-2}X_{d-1}+X_dX_{d+1}$, то циклы $X_0=X_2=X_4=\ldots=X_d=0$ и $X_1=X_2=X_4=\ldots=X_d=0$ неэквивалентны; пусть $l_m, l'_m\in CH_mX$ - их классы. Тогда $CH_mX=\mathbb{Z}\cdot l_m\oplus\mathbb{Z}\cdot l'_m$, а для $p<m$ по-прежнему $CH^pX=\mathbb{Z}\cdot h^p$, $CH_pX=\mathbb{Z}\cdot l_p$. Умножение в CH^*X описывается формулами

$$hl_p=l_{p+1},\quad h^m=\begin{cases} l_m+l'_m, & \text{если } d \text{ четно;}\\ 2l_{m-1}, & \text{если } d \text{ нечетно.}\end{cases}$$

(2.2). Редукция к анизотропному случаю. Вычисление групп Чжоу произвольных квадрик сводится к анизотропному случаю следующим приемом. Пусть $\varphi = \psi \perp n\mathbb{H}$, где ψ - анизотропная часть, n - индекс Витта формы φ; Y - неособая квадрика, соответствующая форме ψ $(\dim Y=d-2n)$. Будем обозначать через $\bar{X}$ квадрику $X\otimes_F E$, где E/F - какое-либо полностью расщепляющее φ расширение. Тогда $CH^pX\xrightarrow[\sim]{res} CH^p\bar{X}$, $CH_pX\xrightarrow[\sim]{res} CH_p\bar{X}$ для $p<n$; $CH^pX\cong CH^{p-n}Y$ для $p=n,n+1,\ldots,d-n$. Проведем построение последнего изоморфизма. Пусть $\varphi=(Y_0,\ldots,Y_{d-2n+1})+$ $+X_1X'_1+\ldots+X_nX'_n$, $i:Z\hookrightarrow X$ - замкнутое подмногообразие, определенное уравнениями $X'_1=X'_2=\ldots=X'_n=0$. Особая квадрика Z является конусом над Y с вершиной $\mathbb{P}^{n-1}$. Выкидывая вершину, получаем векторное расслоение

$\pi\colon Z\backslash\mathbb{P}^{n-1}\longrightarrow Y$. Цепочка морфизмов $Y \xleftarrow{\pi} \mathbb{Z}\backslash\mathbb{P}^{n-1} \xhookrightarrow{j} Z \xhookrightarrow{i} X$ дает цепочку изоморфизмов

$$\mathrm{CH}^{p-n}\, Y \xrightarrow[\sim]{\pi^*} \mathrm{CH}^{\,p-n}\,(Z\backslash\mathbb{P}^{n-1}) \xleftarrow[\sim]{j^*} \mathrm{CH}^{p-n}\, Z \xrightarrow[\sim]{i_*} \mathrm{CH}^p X.$$

Построенный изоморфизм переводит простой цикл на Y, заданный, скажем, уравнениями $f_\alpha(Y_1)=0$, в простой цикл на X, определяемый уравнениями $f_\alpha(Y_1)=0$, $X_1'=X_2'=\ldots=X_n'=0$.

Для вычисления группы классов дивизоров $\mathrm{CH}^1 X$ нам потребуется

(2.3). Лемма. *Пусть E/F - расширение Галуа с группой G. Имеет место точная последовательность* $0\longrightarrow\mathrm{CH}^1 X\longrightarrow(\mathrm{CH}^1 X_E)^G\longrightarrow\mathrm{Br}(E/F)$, *где* $\mathrm{Br}(E/F)$ *- относительная группа Брауэра.*

Доказательство. Имеем две точные последовательности G-модулей

$$0 \longrightarrow E^* \longrightarrow E(X_E)^* \longrightarrow P.\mathrm{Div}X_E \longrightarrow 0, \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow P.\mathrm{Div}\ X_E \longrightarrow \mathrm{Div}\ X_E \longrightarrow \mathrm{CH}^1 X_E \longrightarrow 0, \tag{2}$$

где Div (P.Div) - группа дивизоров (главных дивизоров). Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & E^{*G} \longrightarrow & E(X_E)^{*G} \longrightarrow & (P.\mathrm{Div}X_E)^G \longrightarrow & H^1(G,E^*) \\
& \| & \| & & \\
0 \longrightarrow & F^* \longrightarrow & F(X)^* \longrightarrow & P.\mathrm{Div}X \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Верхняя строка этой диаграммы является началом длинной точной последовательности групп когомологий Галуа для (1). По теореме Гильберта-90 $H^1(G,E^*)=0$. Следовательно, $(P.\mathrm{Div}\ X_E)^G = P.\mathrm{Div}\ X$. Из (2) получаем

$$\begin{array}{ccccc}
0\longrightarrow(P.\mathrm{Div}\ X_E^G) & \longrightarrow(\mathrm{Div}\ X_E^G) & \longrightarrow(\mathrm{CH}^1 X_E)^G & \longrightarrow H^1(G,\ P.\mathrm{Div}\ X_E) \\
\| & \| & & \\
0\longrightarrow P\ \mathrm{Div}\ X & \longrightarrow\ \mathrm{Div}\ X & \longrightarrow \mathrm{CH}^1 X & \longrightarrow 0
\end{array}$$

что дает точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1 X \longrightarrow (\mathrm{CH}^1 X_E)^G \longrightarrow H^1(G,\ P.\ \mathrm{Div}\ X_E).$$

Осталось использовать вложение $H^1(G,P.\mathrm{Div}\ X_E) \hookrightarrow H^2(G,E^*) = \mathrm{Br}(E/F)$, возникающее из (1) благодаря тому, что $H^1(G,E(X_E)^*)=0$.

Согласно (2.2), достаточно дать описание $\mathrm{CH}^1 X$ в анизотропном случае.

(2.4). Предложение. *Пусть φ анизотропна. Группа классов дивизоров $\mathrm{CH}^1 X$ равна $\mathbb{Z}\cdot h$ для всех квадрик, кроме двумерной, заданной формой определителя* 1. *В этом исключительном случае φ с точностью до пропорциональности имеет вид «a,b», и гомоморфизм*

$\mathrm{res}\colon CH^1X \longrightarrow CH^1\bar{X}=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ *отождествляет* CH^1X *с подгруппой в* $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$*, порожденной элементами* $(1,1)=h$ *и* $(2,0)$*. Если, скажем,* $\varphi=X_0^2-aX_1^2-bX_2^2+abX_3^2$*, то* $(2,0)=[Z]$*, где* $Z\colon X_0^2-aX_1^2=0,\ X_0X_2-aX_1X_3$.

Доказательство. Применим лемму (2.3) к какому-либо квадратичному расширению E/F, расщепляющему φ. Если $d\geq 3$ или если $d=2$, но $\det\varphi\neq 1$, то $CH^1X_E=\mathbb{Z}\cdot h$, откуда сразу получаем, что $CH^1X=\mathbb{Z}\cdot h$. Если $\varphi\sim\langle\langle a,b\rangle\rangle$, то $CH^1X_E=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, G действует на CH^1X_E тривиально, образы элементов $(1,0)$ и $(0,1)$ в группе $\mathrm{Br}(E/F)$ совпадают и равны классу кватернионной алгебры $\left(\frac{a,\ b}{F}\right)$. Поскольку кватернионная алгебра имеет экспоненту 2, мы заключаем, что CH^1X есть подгруппа элементов из $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ с четной суммой координат. Наконец, если $d=2$, $\varphi\sim\langle 1,-a,-b\rangle$, то $CH^1X_E=(CH^1X_E)^G=\mathbb{Z}\cdot l_0$ и образ l_0 в $\mathrm{Br}(E/F)$ снова равен $\left[\left(\frac{a,\ b}{F}\right)\right]$. Следовательно, CH^1X порождена элементом $2l_0$, который равен h.

Для дальнейшего нам понадобится одно утверждение о группах Чжоу произвольного многообразия.

(2.5). Лемма. *Пусть X - произвольное многообразие над F, Z - простой цикл на X, E/F - конечное расширение, причем $E\subset F(Z)$. Тогда $[Z]=N_{E/F}([T])$ для некоторого простого цикла T на X_E.*

Доказательство. Пусть сперва $X=\mathrm{Spec}\ A$. Обозначим через $\mathfrak{p}$ простой идеал кольца A, соответствующий Z. Морфизм $X_E\longrightarrow X$ индуцирован вложением $A\hookrightarrow B=A\otimes_F E$. При этом B - конечно порожденный A-модуль, в частности, $A\hookrightarrow B$ - целое расширение колец, поэтому $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\cap A$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{q}\subset B$. Пусть T - простой цикл на X_E, соответствующий $\mathfrak{q}$. Тогда $N([T])=[E(T):F(Z)]\cdot[Z]$. Кольцо B порождено над A элементами из E, поэтому $E(T)$ также порождено над $F(Z)$ элементами из E, но при этом $E\subset F(Z)$. Следовательно, $E(T)=F(Z)$ и $N([T])=[Z]$. В общем случае пусть U - открытое аффинное множество, пересекающееся с Z, T'- простой цикл на U_E, для которого $N([T])=[Z\cap U]$, T - замыкание T' в X_E. Тогда $N([T])=[Z]$.

Пусть снова X - проективная квадрика, заданная невырожденной квадратичной формой φ. Приведем вычисление нульмерной группы Чжоу.

(2.6). Предложение. *Гомоморфизм степени* $\deg\colon CH_0X\longrightarrow\mathbb{Z}$ *является вложением. Тем самым, если φ изотропна, то* $CH_0X=\mathbb{Z}\cdot l_0=\mathbb{Z}\cdot[x]$*, где x - любая замкнутая рациональная точка; если φ анизотропна, то* $CH_0X=\mathbb{Z}\cdot h^d=\mathbb{Z}\cdot[x]$*, где x - любая замкнутая точка степени 2.*

Доказательство требуется лишь в анизотропном случае. Проведем его сперва в предположении, что поле F не имеет расширений нечетной степени. При $d=1$ утверждение является частным случаем (2.4). Пусть $d\geq 2$. Возьмем две замкнутые точки степени два

$x,y\in X$ и покажем, что $[x]=[y]$. Любые две замкнутые точки степени 2 в $\mathbb{P}^{d+1}$ лежат в одном 3-мерном линейном подмногообразии $\mathbb{P}^3\subset\mathbb{P}^{d+1}$. Взяв пересечение X с этим $\mathbb{P}^3$, сводим вопрос к случаю $d=2$. Проведем плоскость через x и плоскость через y. Две плоскости в $\mathbb{P}^3$ пересекаются по прямой. Эта прямая высекает на квадрике точку степени 2, скажем, z. Таким образом, построенные плоскости высекают на квадрике две коники, пересекающиеся в точке z, причем на одной из коник лежит x, на другой - y. Отсюда $[x]=[z]=[y]$. Пусть теперь степень y произвольна, скажем, 2κ. Покажем, что $[y]=\kappa[x]$. Поскольку $[F(y):F]$ - степень двойки (см. предположение относительно F), существует подрасширение $F\subset E\subset F(y)$ такое, что $[F(y):E]=2$. Пусть y' - точка на X_E, для которой $N_{E/F}([y'])=[y]$ (по лемме (2.5) такая точка найдется), $\alpha=\mathrm{res}_{E/F}([x])$. Тогда $\deg y'=2=\deg\alpha$, поэтому $[y']=\alpha$, откуда $[y]=N_{E/F}([y'])=N_{E/F}(\alpha)=[E:F]\cdot[x]=\kappa\cdot[x]$.

В случае произвольного основного поля пусть F' - композит всех конечных расширений E/F нечетной степени. Гомоморфизмы $\mathrm{res}_{E/F}:\mathrm{CH}_0X\to\mathrm{CH}_0X_E$ инъективны, так как композиция $N_{E/F}\circ\mathrm{res}_{E/F}$ есть умножение на нечетное число; $\mathrm{CH}_0X_{F'}=\varinjlim_{E/F}\mathrm{CH}_0X_E$, согласно (1.1). Поэтому $\mathrm{res}_{F'/F}:\mathrm{CH}_0X\to\mathrm{CH}_0X_{F'}$ - также мономорфизм, что завершает доказательство предложения.

(2.7). Несколько замечаний о группах Чжоу произвольной коразмерности в случае анизотропной квадрики. Для каждого p пусть $\mathrm{TCH}^p\subset\mathrm{CH}^p$ подгруппа кручения, $\overline{\mathrm{CH}}^p=\mathrm{CH}^p/\mathrm{TCH}^p$. Для $p\neq d/2$ вычисление группы $\overline{\mathrm{CH}}^p$ тривиально: $\overline{\mathrm{CH}}^p=\mathbb{Z}\cdot h^p$, иначе говоря,

$$\overline{\mathrm{CH}}^p = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } p < d/2; \\ 2\mathbb{Z}, & \text{если } p > d/2 \end{cases}$$

при отождествления $\overline{\mathrm{CH}}^pX$ с подгруппой в $\mathrm{CH}^p\overline{X}$. Группа $\overline{\mathrm{CH}}^{d/2}X\subset\mathrm{CH}^{d/2}\overline{X}=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ (при четном d) порождена элементом $(1,1)=h^{d/2}$, если $\varphi\notin I^2(F)$. В противном случае $\overline{\mathrm{CH}}^{d/2}X$ имеет две образующие $(1,1)$ и $(2^r,0)$ при некотором $r\geq1$, и способ вычисления $r=r(\varphi)$ неизвестен; ясно лишь, что 2^r делит $[E:F]$, где E/F - любое полностью расщепляющее φ расширение, в частности $r\leq m$. Группа TCH^p является 2-периодической. Для доказательства достаточно взять такое полностью расщепляющее φ расширение E/F, что $[E:F]=2^\kappa$. Композиция $\mathrm{CH}^pX\xrightarrow{\mathrm{res}}\overline{\mathrm{CH}}^pX\xrightarrow{N}\mathrm{CH}^pX$ совпадает с умножением на 2^κ, и $\mathrm{T}\overline{\mathrm{CH}}^pX=0$. В остальном строение группы TCH^* весьма загадочно; можно привести пример квадрики, для которой эта группа бесконечна.

§ 3. Топологическая фильтрация на группе Гротендика

Пусть $K(X)$ - группа Гротендика квадрики X. Многообразие X неособо, поэтому $K(X)=K_0'(X)=K_0(X)$. Тензорное произведение локально свободных пучков индуцирует на $K_0(X)$ структуру кольца, а группа $K_0'(X)$ имеет так называемую топологическую фильтрацию [4]. Поэтому $K_0(X)$ - кольцо с фильтрацией, причем эти структуры согласованы. Введем обозначение для фильтрации: $0=K^{(d+1)}\subset K^{(d)}\subset\ldots\subset K^{(0)}=K$, $K_{(p)}=K^{(d-p)}$. Кроме того, положим $G^pK=G_{d-p}K=K^{(p)}/K^{(p+1)}$, и пусть $TG^pK\subset G^pK$ - подгруппа кручения, $\overline{G}^pK=G^pK/TG^pK$.

(3.1). Связь с группами Чжоу. Естественный эпиморфизм $\mathrm{CH}^pX \twoheadrightarrow G^pK(X)$, $[Z]\longmapsto[\mathcal{O}_Z]$ совпадает с краевым эффектом спектральной BGQ-последовательности $E_2^{p,q}(X) \Longrightarrow K'_{p+q}(X)$. Ядро этого эпиморфизма содержится в TCH^pX при всех p и равно нулю, если $p=0,1,2,3,d$ (при $p=0,1$ не существует дифференциалов в спектральной последовательности, заканчивающихся в CH^pX; для $p=2$ единственный дифференциал из $E_2^{0,-1}=H^0(X,K_1)=F^*$ в CH^2X, очевидно, нулевой; случай $p=3$ рассмотрен в § 4; наконец, группа CH^dX не содержит кручения (2.6)). Отметим, что отображение $\mathrm{CH}^*X\longrightarrow G^*K(X)$ является гомоморфизмом градуированных колец. В этом параграфе получим некоторые сведения о $G^*K(X)$ с помощью работы [1], посвященной K-теории квадрик.

(3.2). Случай полностью расщепленной формы. Если форма φ, определяющая квадрику, полностью расщеплена, то $\mathrm{TCH}^pX=0$ (2.1), откуда $\mathrm{CH}^pX\longrightarrow G^pK(X)$ - изоморфизм при всех p. Следовательно, если d нечетно, то $K(X)$ - свободная абелева группа ранга $d+1$ с образующими $1,h,h^2,\ldots,h^{m-1},l_{m-1},l_{m-2},\ldots,l_0$ (здесь h - класс в $K(X)$ структурного пучка гиперплоского сечения, l_p - класс структурного пучка пространства $\mathbb{P}^p\subset X$). Если же d четно, то $K(X)$ - свободная абелева группа ранга $d+2$: добавляются образующие l_m и l_m'. Фильтрация на $K(X)$ в обоих случаях естественная: группа $K^{(p)}(X)$ порождена теми из образующих, коразмерность которых не меньше p ($\operatorname{codim} l_p=d-p$). Отметим, что

$$hl_p = l_{p+1},\quad h^m = \begin{cases} l_m+l_m'-l_{m-1} & \text{при четном } d; \\ 2l_{m-1}-l_{m-2} & \text{при нечетном } d. \end{cases}$$

(3.3). Алгебра Клиффорда. Пусть теперь φ имеет произвольный индекс Витта, $C_0(\varphi)$ - четная часть алгебры Клиффорда $C(\varphi)$. Отметим, что $\dim_F C_0(\varphi)=2^{d+1}$. Определим число $s=s(\varphi)$ следующим образом. Если $\varphi\notin I^2(F)$, то $C_0(\varphi)$ - простая алгебра, поэтому по теореме Веддербарна $C_0(\varphi) \cong M_{2^s}(D)$ для некоторого тела D и целого неотрицательного s. Если же $\varphi\in I^2(F)$, то $C_0(\varphi)\cong A\times A$, где A - простая алгебра (можно показать, что A определяется условием $C(\varphi)\cong M_2(A)$); в этом случае пусть s - такое число, что $A\cong M_{2^s}(D)$. Введенный инвариант s удовлетворяет неравенству $i(\varphi)\le s(\varphi)\le m$, где $i(\varphi)$ - индекс Витта.

(3.4). Пусть как всегда $\bar{X} = X\otimes_F E$, где E/F - полностью расщепляющее φ расширение. Группа $K(X)$ не содержит кручения [1], поэтому гомоморфизм колец $\mathrm{res}: K(X)\longrightarrow K(\bar{X})$ является вложением. Отождествим $K(X)$ с подкольцом в $K(\bar{X})$. Отметим, что $K^{(p)}(X)\subset K^{(p)}(\bar{X})$. Пусть $H=\mathbb{Z}\cdot 1\oplus\mathbb{Z}\cdot h\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}\cdot h^d\subset K(X)$ - подкольцо, порожденное h. Равенство $h=1-\xi$, где $\xi=[\mathcal{O}_X(-1)]$, показывает, что H совпадает с подгруппой, порожденной всеми $[\mathcal{O}_X(n)]$ $(n\in\mathbb{Z})$. Заметим, что фильтрации на H, индуцированные с $K(X)$) и с $K(\bar{X})$ совпадают: H^p порождена элементами $h^p, h^{p+1},\ldots,h^d$.

(3.5). П р е д л о ж е н и е. *Пусть $\varphi\notin I^2(F)$. Тогда*

$$K(X) = H + \mathbb{Z}\cdot \mathfrak{l}_{s-1} = H + \mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}\mathfrak{l}_{m-1},$$

($s=s(\varphi)$ - показатель расщепленности; считаем, что $\mathfrak{l}_{-1}=0$), в частности, если $s=0$, то $K(X)=H$. Если же $\varphi\in I^2(F)$, то

$$K(X) = H + \mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}\mathfrak{l}_m + \mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}\mathfrak{l}'_m.$$

(3.6). Л е м м а. *Пусть $\mathcal{U}$ - пучок Суона квадрики X [1]. Тогда $[\mathcal{U}(d)]=h^d+2h^{d-1}+\ldots+2^{d-1}h+2^d$ в группе $K(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пучок $\mathcal{U}$ имеет резольвенту, составленную из пучков $\mathcal{O}_X(-d+1),\ldots,\mathcal{O}_X(-1)$, $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1)$, которая дает в $K(X)$ равенство

$$[\mathcal{U}]=(C^0_{d+1}+C^1_{d+1}+\ldots+C^d_{d+1})\xi^{d-1} - (C^0_{d+1}+C^1_{d+1}+\ldots+C^{d-1}_{d+1})\xi^{d-2}+\ldots+$$

$$+(-1)^{d-2}(C^0_{d+1}+C^1_{d+1}+C^2_{d+1})\xi + (-1)^{d-1}(C^0_{d+1}+C^1_{d+1}) + (-1)^d C^0_{d+1}\xi^{-1}.$$

Отсюда $(1+\xi)[\mathcal{U}]=(2^{d+1}-1)\xi^d+(-1)^d\ \xi^{-1}-\sum_{k=1}^{d}C^k_{d+1}(-1)^{d+1-k}\ \xi^{k-1}=2^{d+1}\xi^d)$, так как $(1-\xi)^{d+1}= h^{d+1} = 0$. Поэтому $(1+\xi)[\mathcal{U}(d)] = (1+\xi)[\mathcal{U}]\cdot\xi^{-d}= =2^{d+1}$. С другой стороны, $1+\xi = 2-h$ и $(2-h)(h^d+2h^{d-1}+\ldots+2^d) = 2^{d+1}$. Следовательно, $[\mathcal{U}(d)]=h^d+ 2h^{d-1}+\ldots+2^d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я. Рассмотрим случай $\varphi\notin I^2(F)$. Здесь $C_0(\varphi)$ - простая алгебра, так что существует единственный с точностью до изоморфизма простой $C_0(\varphi)$-модуль; обозначим его через J. Имеем $K_0(C_0(\varphi))=\mathbb{Z}\cdot[J]$, $[C_0(\varphi)]=2^s[J]$. Далее, если $u=[\mathcal{U}\otimes_{C_0}J]\in K(X)$, то $2^s u=[\mathcal{U}]$ и, согласно [1], $K(X)=H+\mathbb{Z}\cdot u$. Заменим u на $u\xi^{-d}$. Тогда $2^s u = [U(d)]$ по-прежнему $K(X)=H+\mathbb{Z}$ и, так как $\xi^{-d}H=H$. Утверждение предложения получается теперь из равенства

$2^{p+1}l_p = h^d+2h^{d-1}+\ldots+2^p h^{d-p}$ (для любого $p<m$). В случае $\varphi\in I^2(F)$ алгебра $C_0(\varphi)$ есть $A\times A$, и имеются два неизоморфных простых $C_0(\varphi)$-модуля, скажем, J и J'; группа $K_0\ (C_0(\varphi))$ равна $\mathbb{Z}\cdot[J]\oplus\mathbb{Z}\cdot[J']$. Положим

$$u = [\mathcal{U}\otimes_{C_0} J],\ u' = [\mathcal{U}\otimes_{C_0} J'].$$

Тогда

$$K(X) = H + \mathbb{Z}\cdot u + \mathbb{Z}\cdot u'.$$

Пусть $\bar{u}$, $\bar{u}'$ - образующие Суона группы $K(\bar{X})$. Тогда

$$K(\bar{X}) = H + \mathbb{Z}\cdot\bar{u} + \mathbb{Z}\cdot\bar{u}'= H + \mathbb{Z}\cdot l_m + \mathbb{Z}\cdot l_m';\quad 2^{m-s}\ \bar{u}=u,\ 2^{m-s}\ \bar{u}'=u'.$$

Следовательно,

$$K(X)=H + \mathbb{Z}\cdot u + \mathbb{Z}\cdot\bar{u}' = H + \mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}\ \bar{u} +\mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}\ \bar{u}'=H+\mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}l_m+\mathbb{Z}\cdot 2^{m-s}l_m'.$$

(3.7). Согласно доказанному предложению $l_{s-1}\in K(X)$, откуда $l_{s-2}=hl_{s-1}$, $l_{s-3}=hl_{s-2},\ldots,l_0=hl_1\in K(X)$. Пусть $p_k=\min\{p\,|\,l_k\in K_{(p)}(X)\}$. Ясно, что $p_0<p_1<\ldots<p_{s-1}$ и $p_k\geq k$. Кроме того, если форма φ анизотропна, то $p_k>k$, так как равенство $p_k=k$ при некотором k влекло бы включение $l_0=h^k l_k\in K_{(0)}(X)$, которое, очевидно, не выполняется для квадрики без рациональных точек.

(3.8). Т е о р е м а. *Пусть X - квадрика, заданная анизотропной формой $\varphi\notin I^2(F)$; $p_0,p_1,\ldots,p_{s-1}$ - определенные выше числа. Тогда*

$$TG_pK(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\cdot l_k, & \text{если } p=p_k; \\ 0 & \text{для остальных } p. \end{cases}$$

В частности, $|TGK(X)|=2^{s(\varphi)}$; если $s(\varphi)=0$, то группа $GK(X)$ кручения не имеет.

(3.9). Л е м м а. *В условиях теоремы (3.8) имеет место равенство $K_{(p)}(X)=\mathbb{Z}\cdot l_{k_0}+ H_{(p)}$, где $k_0=\max\ \{k\,|\,l_k\in K_{(p)}(X)\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\supset$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $x=al_{s-1}+\sum a_i h^i\in K_{(p)}$. Используя равенство $2l_j=h^{d-j}+l_{j-1}$, представим x в виде $x=bl_k+ \sum b_i h^i$ с нечетным b. Если $k\leq k_0$, то первое слагаемое лежит в $K_{(p)}$, поэтому второе слагаемое лежит в $K_{(p)}\cap H=H_{(p)}$. Пусть $k>k_0$. Можно считать, что $k=k_0+1$ (заменив x на xh^{k-k_0+1}), $b = 1$ (поскольку $2l_{k_0+1}=h^{d-k_0-1}+ l_{k_0}$). Итак, $l_{k_0+1}+\sum b_i h^i\in K_{(p)}$, откуда $\sum b_i h^i\in K_{(p)}$ и, следовательно, $l_{k_0+1}\in K_{(p)}$, что противоречит выбору числа k_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. При $p\neq p_k$ группа G_pK совпадает по лемме с группой $H_{(p)}/H_{(p-1)}$, которая не имеет кручения. При $p=p_k$ группа G_pK порождена элементами l_k и $\hbar^{d-p}$; при этом $l_k\neq 0$, $2l_k=0$, $\hbar^{d-p}\notin TG_pK$. Поэтому $TG_pK=\mathbb{Z}/2\cdot l_k$.

Картина усложняется в случае $\varphi\in I^2(F)$. Пусть $r=r(\varphi)$ - такое число, что $(2^r,0)$ - вторая образующая группы $\overline{CH^m X}$ (см. (2.7.)).

(3.10). Т е о р е м а. *Пусть X - квадрика, заданная анизотропной формой $\varphi\in I^2(F)$. Тогда градуированную группу $TGK(X)$ можно разложить в сумму двух градуированных подгрупп $T^{I}\oplus T^{II}$ (назовем T^{I} - „кручением первого рода", T^{II} - „кручением второго рода") так, что при этом:*

1) T^{I} обладает теми же свойствами, что кручение в случае $\varphi\notin I^2(F)$, а именно

$$T^{I}_{p} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\cdot l_k, & \text{если } p=p_k; \\ 0 & \text{для остальных } p; \end{cases}$$

2) $T^{II}_{p}=0$ при $p\le m$, $|T^{II}|=2^t$, где t - неотрицательное целое число, удовлетворяющее неравенством $r+s-m\le t\le s$, T^{II}_{p} - циклическая группа при всех p. В частности, $|TGK(X)|=2^{s+t}$; если $s(\varphi)=0$, то группа $GK(X)$ кручения не имеет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулировки теоремы ясно, что T^{I} - подгруппа в TGK, порожденная элементами $l_0,l_1,\dots,l_{s-1}$. Определим группу T^{II}. Пусть $l=2^{m-s}l_m\in K(X)$, $t=\min\{t'|2^{t'}l\in K_m\}$ $q_k=\min\{q|2^k l\in K_{(q)}\}$ для $k=0,1,\dots,t-1$. Ясно, что $q_0\ge q_1\ge\dots\ge q_{t-1}>m$. Если q не равно ни одному из чисел q_k, то положим $T^{II}_{q}=0$. В противном случае, пусть T^{II}_{q} - подгруппа в TG_qK, порожденная элементом $2^{k_0}l$, где $k_0=\min\{k|q=q_k\}$. Отметим, что в обоих случаях $|T^{II}_{q}| = 2^{\operatorname{card}\{k|q=q_k\}}$, так что, в частности, $|T^{II}|=2^t$. Действуя как при доказательстве теоремы (3.8), нетрудно показать, что $TGK=T^{I}\oplus T^{II}$.

(3.11). П р и м е р. *Пусть p - натуральное число, причем $p<m$, если m нечетно. Если форма φ анизотропна и для некоторого квадратичного расширения E/F индекс Витта формы φ_E больше p, то $TG_pK(X)=\mathbb{Z}/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $p<m$, применяя отображение нормы $N_{E/F}$ к элементу $l_p\in K_{(p)}(X_E)$, получаем элемент $2l_p$, откуда $l_{p-1}=2l_p-h^{d-p}\in K_{(p)}(X)$ и, следовательно, $TG_pK(X)=\mathbb{Z}/2\cdot l_{p-1}$. При $p=m$ (если m четно) имеем $N_{E/F}(l_m)=l_m+l'_m$, откуда $l_{m-1}=l_m+l'_m-h^m\in K_{(m)}(X)$.

Отметим, что в условиях примера если, скажем,

$$\varphi=b_0(X_0^2-aY_0^2)+b_1(X_1^2-aY_1^2)+\dots+b_p(X_p^2-aY_p^2)+\psi(T_j),$$

то ненулевой элемент кручения в группе $G_pK(X)$ равен $[O_Z]-h^{d-p}$, где Z - простой цикл, заданный уравнениями

$$X_0X_i-aY_0Y_i=0 \quad (i=0,1,\dots,p), \quad T_j=0$$

(Z не является локально полным пересечением).

Завершим параграф описанием поведения группы G^*K квадрики при некоторых расширениях основного поля.

(3.12). Предложение. *Пусть E/F – расширение одного из следующих типов:*

1) *алгебраическое (возможно, бесконечное) нечетной степени;*
2) *чисто трансцендентное.*

Тогда гомоморфизм $\mathrm{res}_{E/F}: GK(X)\to GK(X_E)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. В силу [1] согласованный с фильтрацией гомоморфизм $\mathrm{res}_{E/F}K(X)\to K(X_E)$ есть изоморфизм. Поэтому чтобы доказать, что индуцированный гомоморфизм ассоциированных градуированных групп тоже изоморфизм, достаточно проверить его инъективность или сюръективность. Если E/F – конечное расширение нечетной степени, то $\mathrm{res}_{E/F}: G^*K(X)\to G^*K(X_E)$ инъективен, так как композиция $N_{E/F}\circ\mathrm{res}_{E/F}$ есть умножение на нечетное число $[E:F]$. Для бесконечного нечетного алгебраического расширения инъективность res следует из перестановочности G^*K с проективными пределами (1.1). Пусть теперь E/F – чисто трансцендентное расширение. В этом случае докажем сюръективность $\mathrm{res}_{E/F}$. Можем считать, что E – поле рациональных функций аффинного пространства $\mathbb{A}^n_F$. Докажем сначала сюръективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{E/F}: \mathrm{CH}^*X\to \mathrm{CH}^*X_E$ на группах Чжоу. Для этого разложим его в композицию $\mathrm{CH}^*X\to\mathrm{CH}^*(X\times\mathbb{A}^n)\to\mathrm{CH}^*X_E$. Первая стрелка – изоморфизм ввиду гомотопической инвариантности групп Чжоу (1.4). Вторая стрелка совпадает с последним гомоморфизмом в точной последовательности (1.3.2), связанной с плоским морфизмом $\mathrm{pr}: X\times\mathbb{A}^n\to\mathbb{A}^n$, поэтому сюръективна. Сюръективность res на G^*K получается теперь из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^* & \twoheadrightarrow & \mathrm{CH}^*X_E \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^*K(X) & \to & G^*K(X_E) \end{array} \quad .$$

§ 4. Группа $\mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathrm{K}_2)$

(4.1). Теорема. *При $d\ge 3$ естественный гомоморфизм* $F^*=H^0(X,K_1)\otimes\mathrm{CH}^1X\to H^1(X,K_2)$ *является изоморфизмом.*

(4.2). Лемма. *Пусть X содержит рациональную точку. Тогда*

$$F^*\xrightarrow{\sim} H^1(X,K_2),\quad K_2(F)\xrightarrow{\sim} H^0(X,K_2).$$

Доказательство. Пусть $\varphi=X_0X_1+\ldots, Y$ – гиперплоское сечение $X_0=0$ квадрики X, $U=X\setminus Y\cong\mathbb{A}^d$. Получаем диаграмму с точной строкой

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow H^0(X,K_2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(U,K_2) & \longrightarrow & H^0(Y,K_1) & \longrightarrow & H^1(X,K_2) & \longrightarrow & H^1(U,K_2) \\ & \nwarrow^{\alpha} & \| & & \| & & & & \| \\ & & K_2(F) & & F^* & & & & 0 \end{array},$$

где α - обратный образ структурного морфизма. Треугольник коммутативен, поэтому гомоморфизм β сюръективен, и последовательность распадается на два изоморфизма.

Пусть теперь X без рациональных точек, E/F - такое квадратичное расширение, что φ_E изотропна. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_E,K_2) \\ & & \uparrow \mathrm{res} \\ F^* & \xrightarrow{f} & H^1(X,K_2) \end{array}$$

следует, что f - вложение. Более того, $\mathrm{Im\,res} \subset H^1(X_E,K_2)^G = E^{*G} = F^*(G = \mathrm{Gal}(E/F))$, так что гомоморфизм res дает расщепление мономорфизма f, и для доказательства теоремы достаточно доказать

(4.3). Предложение. *Гомоморфизм $\mathrm{res}_{E/F}: H^1(X,K_2) \longrightarrow H^1(X_E,K_2)$ инъективен для произвольного квадратичного расширения $E=F(\sqrt{a})$.*

Доказательство использует два результата о квадратичных расширениях. Первый - теорема Гильберта-90 для K_2 [2]. Второй - следующее описание $(K_2E)^G$ [3], с. 16: любой $\mu\in(K_2E)^G$ представляется в виде $\xi_E+\{\sqrt{a},c\}$, где $\xi\in K_2(F)$, $c\in F_0^*$ (F_0 - замыкание в F простого подполя) и $\{-1,c\}=0\in K_2(F_0)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & K_2F(X) & \xrightarrow{d} & \coprod_{x\in X^1} F(x)^* \\ & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow K_2E & \longrightarrow & K_2E(X) & \xrightarrow{d} & \coprod_{x\in X_E^1} E(x)^* \end{array}$$

Пусть $\nu \in \coprod_{x\in X^1} F(x)^*$, $\eta=r\nu$ и $\eta=d\mu$ для некоторого $\mu\in K_2E(X)$. Требуется найти $\xi\in K_2F(X)$, для которого $\nu=d\xi$. Пусть σ - образующая группы Галуа G. Элемент η является σ-инвариантным, следовательно, $\mu-\sigma\mu \in \mathrm{Ker}\,d=K_2E$ (лемма (4.2)). Так как $\mu - \sigma\mu \in \mathrm{Ker}(K_2E \xrightarrow{N} K_2F)$, то по теореме Гильберта-90 найдется такой $t\in K_2E$, что $\mu-\sigma\mu = t-\sigma t$. Заменим μ на $\mu-t$. Тогда по-прежнему $d\mu=\eta$ и, кроме того, теперь $\mu\in(K_2E(X))^G$. Используя описание $(K_2E(X))^G$ для квадратичного расширения $E(X)/F(X)$ и учитывая, что F алгебраически замкнуто в $F(X)$, получаем представление μ в виде $\mu = r\xi+\Theta$, где $\xi\in K_2F(X)$, $\Theta \in K_2E$. Теперь $rd\xi=dr\xi=\eta=r\nu$, откуда $d\xi=\nu$. Предложение и теорема доказаны.

(4.4). Следствие. *Для любой квадрики X все дифференциалы спектральной BGQ-последовательности, выходящие из* *членов* $E_r^{1,-2}(X)$ *при* $r\geq 2$ *равны нулю.*

Доказательство. Если $d<3$, доказывать нечего. Пусть $d\geq 3$. Имеем $K_1^{(1/2)}(X)=E_\infty^{1,-2}(X)\hookrightarrow E_2^{1,-2}(X)=H^1(X,K_2)$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} K_1^{(1/2)}(X) \arrow[rr, hook] & & H^1(X,K_2) \\ & F^* \arrow[ul] \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

получаем $E_\infty^{1,-2}=E_2^{1,-2}$, что эквивалентно доказываемому утверждению.

Используя дополнительно, что дифференциалы из членов $E_r^{0,-1}$ при $r\geq 2$ также нулевые, получаем

(4.5). Следствие. *Отображение* $\mathrm{CH}^3X \longrightarrow G^3K(X)$ *является изоморфизмом.*

§ 5. Квадрики размерности 3 и 4

Результаты предыдущих параграфов позволяют вычислить группы Чжоу квадрик размерности не выше 4. Для таких квадрик $\mathrm{CH}^pX\longrightarrow G^pK(X)$ - изоморфизм при всех p. Начнем со вспомогательных утверждений.

(5.1). Лемма [5]. *Для любой нечетномерной квадратичной формы* φ *в группе Брауэра* $\mathrm{Br}F$ *поля* F *выполнено равенство*

$$[C_0(\varphi)] = [C(\varphi \perp \langle -d_\pm\varphi\rangle)].$$

(5.2). Следствие. *Для нечетномеренной формы* φ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) $[C_0(\varphi)]$ *- тривиально в* $\mathrm{Br}F$*;*

2) $[\varphi \perp \langle -d_\pm\varphi\rangle] \in I^3(F)$.

Доказательство. Заметим, что $[\varphi \perp \langle -d_\pm\varphi\rangle] \in I^2(F)$, а гомоморфизм $I^2/I^3 \longrightarrow {}_2\mathrm{Br}F$, $[\bar\psi]\longmapsto[C(\psi)]$ является изоморфизмом [6].

Группы Чжоу коник и 2-мерных квадрик описаны в § 2, так что начинаем со случая $d=3$.

(5.3). Теорема. *Пусть* X *- трехмерная квадрика без рациональных точек. Если* $\varphi \sim \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle c\rangle$, *то* $\mathrm{TCH}^2X=\mathbb{Z}/2$*; в противном случае,* $\mathrm{TCH}^2X=0$.

Доказательство. Из теоремы (3.8), учитывая, что $\mathrm{TCH}^1X=0$, получаем $\mathrm{TCH}^2X=\mathbb{Z}/2$, если $s(\varphi)\geq 1$; $\mathrm{TCH}^2X=0$, если $s(\varphi)=0$. Условие $s\geq 1$ означает, что $[C_0(\varphi)]=0$ в $\mathrm{Br}E$ для некоторого квадратичного расширения $E=F(\sqrt{a})$, т. е. (следствие (5.2)) $[\varphi \perp \langle -d_\pm\varphi\rangle]_E\in I^3(E)$. Поскольку размерность формы $\varphi \perp \langle -d_\pm\varphi\rangle$ равна $6<2^3$, последнее соотношение означает, что форма $([\varphi \perp \langle -d_\pm\varphi\rangle])_E$ гиперболическая [5], т. е. индекс Витта формы φ_E равен 2, откуда $\varphi \sim \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle c\rangle$ для некоторых $b,c\in F^*$.

Переходим к изучению 4-мерных квадрик.

(5.4). Предложение. *Пусть φ – 6-мерная анизотропная форма. Тогда*

I. *если* $d_{\pm}\varphi = -\det \varphi = 1$, *то* $s(\varphi)=0$;

II. *если* $-\det \varphi \neq 1$, *то*

1) $s(\varphi)=2 \Leftrightarrow \varphi\sim \langle\langle a\rangle\rangle \otimes \langle 1,b,c\rangle$;

2) $s(\varphi)=1 \Leftrightarrow \varphi\sim \langle\langle a\rangle\rangle b\rangle\rangle\perp\langle c,d\rangle$, *причем* $cd\notin D\langle -a,-b,ab\rangle$;

3) $s(\varphi)=0 \Leftrightarrow \varphi$ *не содержит 4-мерных подформ определителя* 1.

Доказательство. Пусть $\varphi=\langle 1\rangle\perp\psi$. Тогда $C_0(\varphi)\cong$ $\cong C(\psi)$ [5].

I. Пусть $-\det\varphi = 1$. В этом случае $C(\psi)\cong C_0(\psi)\times C_0(\psi)$, откуда $s(\varphi)=s(\psi)$. Если $s>0$, то, как было показано при доказательстве теоремы (5.3), форма ψ содержит 4-мерную подформу определителя 1 и, следовательно, представляет 1 (так как $\det\psi = 1$), что противоречит анизотропности формы φ.

II. Пусть $-\det\varphi \neq 1$. Тогда $C(\psi)\cong C_0(\psi)\otimes E$, где $E=F(\sqrt{-\det\varphi})$; кроме того, $\psi_E\perp\langle -\det\psi_E\rangle = \varphi_E$.

1) Условие $s=2$ означает, что форма φ_E гиперболическая, т. е. $\varphi\sim\langle\langle a\rangle\rangle\otimes\langle 1,b,c\rangle$, где $a=-\det\varphi$.

2) Если $s=1$, то φ_E изотропна, и, следовательно, φ содержит 4-мерную подформу определителя 1. Утверждение 3) – простое следствие утверждений 1) и 2).

Используя предложение (5.4), теоремы (3.8) и (3.10) и пример (3.11), получаем теорему:

(5.5). Теорема. *Пусть X – 4-мерная квадрика без рациональных точек. Тогда*

I. *если* $-\det\varphi = 1$, *то* CH^*X *кручения не имеет,* CH^2X *– подгруппа в* $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, *порожденная элементами* $(1,1)=h^2$ *и* $(4,0)$;

II. *если* $-\det\varphi \neq 1$, *то*

в случае 1) *предложения* (5.4) $\mathrm{TCH}^2X=\mathbb{Z}/2=\mathrm{TCH}^3X$;

в случае 2) $\mathrm{TCH}^2X=0$, $\mathrm{TCH}^3X=\mathbb{Z}/2$;

в случае 3) *кручения нет.*

(5.6). Дополнение. *Если* $\varphi = a_0X_0^2+\ldots+a_5X_5^2$ *и* $a_0a_1,\ldots,a_5=-1$*(случай* I*), то* $\mathrm{CH}^2X\ni(4,0)=[Z]$, *где* Z:

$$a_0X_0^2+a_1X_1^2=0,\quad a_2X_2^2+a_3X_3^2=0,\quad X_0X_2X_4+a_1a_3a_5X_1X_3X_5=0.$$

§ 6. Группа CH^2X

(6.1). Теорема. *Пусть X – проективная квадрика, заданная невырожденной квадратичной формой φ. Если φ анизотропна, пропорциональна подформе 3-формы Пфистера и* $\dim\varphi>4$, *то* $\mathrm{TCH}^2X=\mathbb{Z}/2$. *В* *остальных случаях* $\mathrm{TCH}^2X=0$.

(6.2). Л е м м а. *Пусть* U *- аффинная квадрика над полем* F, *определенная уравнением* $a_0+a_1Y_1^2+\ldots+a_nY_n^2+b_1X_1^2+\ldots+b_5X_5^2=0$ $(n\geq 1)$; V *- 4-мерная квадрика над полем* $F(y_1,\ldots y_n)$, *заданная уравнением* $(a_0+a_1y_n^2 + a_ny_n^2)+b_1X_1^2+\ldots+b_5X_5^2=0$. . *Тогда естественный гомоморфизм* $\mathrm{CH}^2U \longrightarrow \mathrm{CH}^2V$ *является изоморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Морфизм $\pi: U \longrightarrow \mathbb{A}^1, (y_1,\ldots,y_n, x_1,\ldots,x_5) \longmapsto y_1$, согласно (1.3.2), дает точную последовательность $\coprod_{t\in(\mathbb{A}^1)^1} \mathrm{CH}^1U_t \longrightarrow \mathrm{CH}^2U \longrightarrow \mathrm{CH}^2\tilde{U} \longrightarrow 0$, где U_t - слой π над замкнутой точкой t, $\tilde{U}$ - слой над общей точкой - квадрика над полем $F(y_1)$, заданная уравнением $(a_0+a_1y_1^2)+a_2Y_2^2+\ldots=0$. Поскольку $\mathrm{CH}^1U_t=0$ для всех t, получаем изоморфизм $\mathrm{CH}^2U \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^2\tilde{U}$. Продолжая действовать подобным образом, через n шагов получим утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. В изотропном случае доказывать нечего; далее φ анизотропна. Для квадратичных форм размерности не выше 6 теорема получается из результатов предыдущего параграфа. Пусть $\varphi = a_0Y_0^2+a_1V_1^2+\ldots+a_nY_n^2+b_1X_1^2+b_5X_5^2 (n\geq 1)$, Y - гиперплоское сечение $Y_0=0$ проективной квадрики X. Из точной последовательности $\mathrm{CH}^1Y \longrightarrow \mathrm{CH}^2X \longrightarrow \mathrm{CH}^2U \longrightarrow 0$ получаем $\mathrm{TCH}^2X=\mathrm{CH}^2U$; по лемме (6.2) $\mathrm{CH}^2U=\mathrm{CH}^2V$ и, далее, $\mathrm{CH}^2V=\mathrm{TCH}^2X'$, где X' - 4-мерная проективная квадрика над полем $F(y_1,\ldots,y_n)$, соответствующая анизотропной форме $\psi = (a_0+a_1y_1^2+\ldots+ +a_ny_n^2)X_0^2+b_1X_1^2+\ldots+b_5X_5^2$. Группа TCH^2X' вычислена в § 5. Так как $-\det \psi\neq 1$, то по теореме (5.5) $\mathrm{TCH}^2X'=\mathbb{Z}/2$, если ψ полностью расщепляется в квадратичном расширении, $\mathrm{TCH}^2X'=0$ - в противном случае. Последним шагом в доказательстве теоремы является

(6.3). Л е м м а. *Следующие утверждения равносильны:*

а) ψ *полностью расщепляется в квадратичном расширении;*

б) φ *пропорциональная подформе 3-формы Пфистера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что из а) следует б). Пусть $L=F(y_1,\ldots,y_n)$, $E=L(\sqrt{-\det\psi})$. Если 6-мерная анизотропная форма полностью расщепляется в некотором квадратичном расширении, то она полностью расщепляется при присоединении $\sqrt{-\det}$. Определитель формы $\chi=\langle -b_1,\ldots,b_5,b_1,\ldots,b_5\rangle$ равен -1 и $\chi_E\cong\psi_E$ полностью расщеплена. Следовательно, χ изотропна, откуда $\langle b_1,\ldots,b_5\rangle_{\sim} \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle$. Можем считать, что $\psi = \langle (a_0+a_1y_1^2+\ldots+a_ny_n^2), 1,-a,-b,ab,-c\rangle$. Форма $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ расщепляется при присоединении к L корня из $-\det\psi = c(a_0+a_1y_1^2+\ldots+a_ny_n^2)$, следовательно, $\det\psi \in D_L\langle -a,-b,ab\rangle$, т. е. $a_0+a_1y_1^2+\ldots+a_ny_n^2\in D_L\langle ac,bc,-abc\rangle$. Последнее означает [5], что $\langle a_0,$

$a_1, \ldots, a_n>$ - подформа в $<ac,bc,-abc>$, откуда φ - подформа в $\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$. Обратная импликация б) $\Longrightarrow$ а) тривиальна.

(6.4). Дополнение. Пусть $\varphi = X_0^2 -aX_1^2 -bX_2^2 + abX_3^2 - c(Y_0^2-aY_1^2-bY_2^2+abY_3^2)$ - анизотропная 3-форма Пфистера. Пройдя через использованные в доказательстве теоремы изоморфизмы, можно показать, что ненулевой элемент кручения в CH^2X равен $[Z]-h^2$, где цикл Z задан уравнениями: $X_0^2-aX_1^2-bX_2^2 + abX_3^2=0$, $X_0Y_0- aX_1Y_1- bX_2Y_2 + abX_3Y_3 = 0$, $X_0Y_3-X_1Y_2+ X_2Y_1- X_3Y_0=0$. Удалив члены, содержащие Y_3, получим формулу для 7-мерной подформы 3-формы Пфистера.

§ 7. Группа $G_1K(X)$

(7.1). Будем говорить, что квадратичная форма φ обладает свойством R, если $\dim \varphi\geq 5$ и существует такое конечное расширение нечетной степени E/F, что φ_E содержит подформу, пропорциональную 2-форме Пфистера (иначе говоря, 4-мерную подформу определителя 1).

(7.2). Замечание. Скажем, что форма φ размерности не меньше 5 обладает свойством R', если φ содержит 4-мерную подформу определителя 1. Свойства R и R' эквивалентны, если $\dim \varphi = 5,6$. Однако можно привести пример 7-мерной формы, обладающей R, но не обладающей R'.

(7.3). Теорема. *Пусть X - проективная квадрика, заданная невырожденной квадратичной формой φ. Если φ анизотропна и обладает R, то $TG_1K(X)=\mathbb{Z}/2$. В остальных случаях $TG_1K(X)=0$.*

Доказательство. Согласно (3.12.1), мы можем считать, что основное поле не имеет нечетных расширений (заменив F на композит всех нечетных расширений). Тогда свойство R превращается в R'. Если φ анизотропна и обладает R', то $TG_1K(X)=\mathbb{Z}/2$, согласно (3.11). Если φ изотропна, то, очевидно, $TG_1K(X)=0$.

Пусть φ анизотропна и $TG_1K(X)=\mathbb{Z}/2$. Нам осталось доказать, что в этом случае φ обладает R'. Доказательство будем вести индукцией по $\dim \varphi$. База - $\dim \varphi = 5$ - теорема (5.3). Пусть $\dim \varphi\geq 6$, Y - некоторое гиперплоское сечение квадрики X. Сечение Y является квадрикой, соответствующей некоторой подформе ψ формы φ, причем $\dim \psi=\dim \varphi-1$. Если $TG_1K(Y)\neq 0$, то по индукционному предположению ψ обладает R', откуда φ также обладает R'. Далее считаем, что $TG_1K(Y)=0$. Положим $U=X\setminus Y$. Для квадрики без рациональных точек точная последовательность $0\longrightarrow TG_1K\longrightarrow G_1K\longrightarrow \overline{G}_1K\longrightarrow 0$ имеет каноническое расщепление $\overline{G}_1K \hookrightarrow G_1K$, $\bar{h}^{d-1}\longmapsto h^{d-1}$, которое дает каноническое разложение $G_1K=TG_1K\oplus\overline{G}_1K$. В дальнейшем стрелка $G_1K\longrightarrow TG_1K$ всегда будет обозначать соответствующую проекцию. Коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} CH_1Y & \longrightarrow & CH_1X & \longrightarrow & CH_1U & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ G_1K(Y) & \longrightarrow & G_1K(X) & \longrightarrow & TG_1K(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

дает эпиморфизм $\alpha\colon CH_1U \twoheadrightarrow TG_1K(X)$ (нижняя строка диаграммы точна, так как $G_1K(Y)$ не имеет кручения). Кроме того, написав для расслоения $U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ точную последовательность (1.3.2)

$$\coprod_{x\in(\mathbb{A}^1)^1} CH_1U_x \longrightarrow CH_1U \longrightarrow CH_0U_\theta \longrightarrow 0,$$

учитывая, что $CH_0U_\theta=0$, получаем эпиморфизм $\beta\colon \coprod_{x\in(\mathbb{A}^1)^1} CH_1U_x \twoheadrightarrow CH_1U$.

Группа $\coprod CH_1U_x$ порождена всевозможными парами $(x,[Z])$, где x - замкнутая точка на $\mathbb{A}^1$, Z - простой цикл на U_x. Поэтому для некоторой такой пары получим $\alpha\circ\beta(x,[Z])\neq 0$. Морфизм $U_x \hookrightarrow U$ - замкнутое вложение и $\beta(x,[Z])=[Z]$. Пусть $\overline{Z}$ - замыкание Z в X. Тогда $f([\overline{Z}])\neq 0$, где f - композиция $CH_1X \twoheadrightarrow G_1K(X) \twoheadrightarrow TG_1K(X)$, как явствует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & CH_1U_x & \ni & [Z] \\ & & & & \downarrow\beta & & \\ [\overline{Z}] & \in & CH_1X & \longrightarrow & CH_1U & \ni & [Z] \\ & & \downarrow & \searrow^{f} & \downarrow\alpha & & \\ & & G_1K(X) & \longrightarrow & TG_1K(X) & & \end{array}$$

Если $\deg x=1$, то U_x - гиперплоское сечение аффинной квадрики. Пусть Y' - проективное замыкание U_x в X. Тогда Y' - гиперплоское сечение X и $\overline{Z}\subset Y'$. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} [\overline{Z}] & \in & CH_1Y' & \longrightarrow & CH_1X & \ni & [\overline{Z}] \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & G_1K(Y') & \longrightarrow & G_1K(X) & \longrightarrow & TG_1K(X) \end{array}$$

получаем, что $TG_1K(Y')\neq 0$, откуда (по индукционному предположению) φ обладает R'. Осталось разобрать случай $\deg x\geq 2$. Имеем $F\subset F(x)\subset F(\overline{Z})$. Пусть E/F - подрасширение в $F(x)/F$ степени 2. Докажем, что $i(\varphi_E)\geq 2$. По лемме (2.5) $[\overline{Z}]\in\mathrm{Im}\ (N\colon CH_1X_E \longrightarrow CH_1X)$. Образ $[\overline{Z}]$ в $TG_1K(X)$ отличен от нуля, поэтому образ $[\overline{Z}]$ в $G_1K(X)$ равен l_0+nh^{d-1} для некоторого целого n. Из коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} CH_1X_E & \longrightarrow & G_1K(X_E) \\ \downarrow N & & \downarrow N \\ CH_1X & \longrightarrow & G_1K(X) \end{array}$$

получаем, что $l_0+nh^{d-1}\in\mathrm{Im}\ (N\colon G_1K(X_E)\longrightarrow G_1K(X))$, т. е. $(2j+1)l_0+nh^{d-1}\in$ $\in \mathrm{Im}\ (N\colon K_{(1)}(X_E)\longrightarrow K_{(1)}(X))$ при некотором j. Предположим, что

$I_1\in K_{(1)}(X_E)$. Тогда любой элемент из $K_{(1)}(X_E)$ имеет вид aI_0+bh^{d-1} и $N(aI_0+bh^{d-1})=2aI_0+2bh^{d-1}$, откуда $(2j+1)I_0+nh^{d-1}\notin \mathrm{Im}\ N$. Следовательно, $I_1\in K_{(1)}(X_E)$, т.е. $i(\varphi_E)\geq 2$, и φ обладает R'. Теорема доказана.

§ 8. Квадрики размерности 5 и 6

Используя теоремы (3.8), (6.1) и (7.1), получаем вычисление $G^*K(X)$ для 5-мерной квадрики.

(8.1). Т е о р е м а. *Пусть X – 5-мерная проективная квадрика, заданная анизотропной формой φ . Тогда в $G^*K(X)$ возможны следующие варианты распределения кручения (символ * означает $\mathbb{Z}/2$):*

Условие на φ

Коразмерность	$s(\varphi)=0$	$s(\varphi)=1$, φ обладает R	$s(\varphi)=1$, φ не обладает R	$s(\varphi)=2$	$s(\varphi)=3$
2	0	0	0	0	*
3	0	0	*	*	*
4	0	*	0	*	*

(8.2). П р и м е р. Пусть $\varphi=a_0X_0^2+\ldots+a_5X_5^2+a_6X_6^2$ – анизотропная форма и $a_0a_1\ldots a_5=-1$. Тогда $s(\varphi)=1$. Пусть Z – простой цикл, заданный уравнениями $X_6=0$, $a_0X_0^2+a_1X_1^2=0$, $a_2X_2^2+a_3X_3^2=0$, $X_0X_2X_1 + a_1a_3a_5X_1X_3X_5=0$. Тогда $[O_Z]=4I_1\in G_2K(X)$, откуда $[O_Z]-2h^3$ – ненулевой элемент кручения, если φ не обладает R.

В заключение мы приведем вычисление $G^*K(X)$ для одного класса 6-мерных квадрик.

(8.3). Т е о р е м а. *Пусть X – 6-мерная проективная квадрика, заданная анизотропной формой φ определителя* 1. *В $G^*K(X)$ возможны следующие варианты распределения кручения*:

Условие на φ

Коразмерность	$s(\varphi)=0$	$s(\varphi)=1$, φ обладает R	$s(\varphi)=1$, φ не обладает R	$s(\varphi)=2$	$s(\varphi)=3$
2	0	0	0	0	*
3	0	0	0	0	*
4	0	0	*	*	*
5	0	*	0	*	*

Отметим, что кручение второго рода возникает только в случае $s(\varphi)=3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $s(\varphi)=3$, то φ пропорциональна 3-форме Пфистера и достаточно воспользоваться утверждениями (3.11) и (6.1). Если $s(\varphi)=0$, то кручения нет в силу (3.10). Оставшуюся часть доказательства разобьем на несколько лемм. Мы предполагаем ниже, что основное поле не имеет расширений нечетной степени.

(8.3.1). Лемма. *Если* $s(\varphi)=2$, *то* φ *обладает* R'.

Доказательство. Пусть $\varphi=\langle a\rangle\perp\psi$, Y - проективная квадрика, соответствующая ψ. Так как $s(\psi)=s(\varphi)=2$, то по теореме (8.1) $TG_1K(Y)\neq 0$, т.е. ψ обладает R'. Следовательно, φ также обладает R'.

(8.3.2). Лемма. *Если* $s(\varphi)=2$, *то* φ *делится на* $\langle\langle a\rangle\rangle$ *при некотором* $a\in F^*$.

Доказательство. Согласно (8.4.1), $\varphi=f\cdot\langle\langle b_1,b_2\rangle\rangle\perp g\cdot\langle\langle c_1,c_2\rangle\rangle$, откуда $[C(\varphi)]=\left[\left(\frac{b_1,\ b_2}{F}\right)\otimes\left(\frac{c_1,\ c_2}{F}\right)\right]$. Так как $s(\varphi)=2$, выписанное тензорное произведение кватернионных алгебр не является телом, т.е. форма $\langle b_1,b_2,-b_1b_2,-c_1,-c_2,c_1c_2\rangle$ изотропна. Последнее означает, что существует элемент $a\in F^*$, являющийся значением чистых подформ обеих 2-форм Пфистера, откуда φ делится на $\langle\langle a\rangle\rangle$.

Ввиду (3.11) лемма (8.3.2) доказывает теорему для случая $s(\varphi)=2$. Последний оставшийся случай $s(\varphi)=1$ обслуживают теорема (7.3) и следующая

(8.3.3). Лемма. *Если* $s(\varphi)=1$, *то* $\mathfrak{l}_0\in K_{(2)}(X)$.

Доказательство. Если ψ - какая-либо 7-мерная подформа в φ, Y - соответствующее гиперплоское сечение, то $s(\psi)=1$ и по теореме (8.1) $\mathfrak{l}_0\in K_{(2)}(X)$. Применив отображение $K_{(2)}(Y)\longrightarrow K_{(2)}(X)$, получаем, что $\mathfrak{l}_0\in K_{(2)}(X)$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Swan R.G. K-theory of quadratic hypersurfaces // Ann. Math. 1985. Vol.122, N 1. P.113-154.

[2] Меркурьев А.С., Суслин А.А. K-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т.46, N 5. С.1011-1046.

[3] Merkurjev A.S., Suslin A.A. On the norm residue homomorphism of degree three. LOMI preprints. E-9-86. 1986.

[4] Quillen D. Higher algebraic K-theory. I // Lect. Notes Math. 1973. Vol.341. P.77-139.

[5] Lam T.Y. The algebraic theory of quadratic forms. Reading. 1973.

[6] Меркурьев А.С. О символе норменного вычета степени 2 // ДАН СССР. 1981. Т.261, N 3. С.542-547.

Ленинградский
государственный университет
199034, Ленинград,
Университетская наб., 7/9

Поступила 14 июня 1989 г.