Н.А.Карпенко, А.С.Меркурьев

ГРУППЫ ЧЖОУ ПРОЕКТИВНЫХ КВАДРИК

Построена 5-мерная проективная квадрика Q над некоторым полем, группа Чжоу $\mathrm{CH}^4 Q$ которой не является конечно порожденной. Этот результат свидетельствует, что задача вычисления кольца Чжоу проективных квадрик существенно сложнее задачи вычисления их K-теории, решенной Суоном [5].

Пусть X - неприводимое алгебраическое многообразие над некоторым полем F. *Циклом коразмерности* p на X называется элемент свободной абелевой группы, порожденной замкнутыми неприводимыми подмногообразиями коразмерности p в X. На группе циклов коразмерности p вводится понятие рациональной эквивалентности [1]. Группа классов циклов относительно этой эквивалентности обозначается $\mathrm{CH}^p X$ и называется *p-й группой Чжоу* многообразия X. Класс цикла $\sum n_i Y_i$, где Y_i - замкнутые неприводимые подмногообразия коразмерности p в X, будем обозначать через $\sum n_i [Y_i] \in \mathrm{CH}^p X$. Градуированная группа $\mathrm{CH}^* X = \coprod_{p \geq 0} \mathrm{CH}^p X$ называется *группой Чжоу* многообразия X. Иногда мы будем использовать нижние индексы для групп Чжоу, полагая $\mathrm{CH}_p X = \mathrm{CH}^{d-p} X$, где $d = \dim X$. Подгруппу кручения в $\mathrm{CH}^p X$ обозначим $\mathrm{TCH}^p X$ и положим $\overline{\mathrm{CH}}^p X = \mathrm{CH}^p X / \mathrm{TCH}^p X$.

Для любого *неособого* многообразия X построена теория пересечений [1-3], состоящая в задании билинейного спаривания $\mathrm{CH}^i X \times \mathrm{CH}^j X \longrightarrow \mathrm{CH}^{i+j} X$ для любых $i, j \geq 0$, которое превращает группу Чжоу многообразия X в ассоциативное коммутативное градуированное кольцо с единицей, называемое *кольцом Чжоу*.

Перечислим несколько хорошо известных свойств и примеров групп Чжоу многообразий [1,2].

1. Группа $\mathrm{CH}^0 X$ порождена классом $[X]$, так что $\mathrm{CH}^0 X \simeq \mathbb{Z}$.

2. Группа $\mathrm{CH}^1 X$ совпадает с группой классов дивизоров многообразия X [4].

3. Если $X = \mathbb{A}^n_F$ - аффинное пространство, то $\mathrm{CH}^* X = \mathrm{CH}^0 X = \mathbb{Z}$.

4. Если $X = \mathbb{P}^n_F$ - проективное пространство, то градуированное кольцо $\mathrm{CH}^* X$ изоморфно фактор-кольцу $\mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$, где h - класс гиперплоскости, имеющий степень 1, т.е. группа $\mathrm{CH}^p X$ порождается классом линейного подпространства коразмерности p при $p = 0, 1, \ldots, n$.

Ключевые слова: квадратичная форма, формы Пристера, квадрика, алгебраические циклы, кольца Чжоу.

5. Для любого *плоского* морфизма $f : Y \longrightarrow X$ имеется гомоморфизм градуированных групп $f^*: CH^*X \longrightarrow CH^*Y$, называемый *обратным образом*. Для морфизма проекции $f : X_E \longrightarrow X$, где E/F - произвольное расширение полей, гомоморфизм f^* обозначается $\mathrm{res}_{E/F}$. В случае неособых многообразий обратный образ определен для произвольного морфизма $f : Y \longrightarrow X$ и является гомоморфизмом градуированных колец.

6. Для любого *собственного морфизма* $f : Y \longrightarrow X$ определен гомоморфизм градуированных групп $f_* : CH_*Y \longrightarrow CH_*X$, который называется *прямым образом*. Если E/F - конечное расширение, $f : X_E \longrightarrow X$ - проекция, то f_* обозначается $N_{E/F}$. Композиция $N_{E/F} \circ \mathrm{res}_{E/F}$ совпадает с умножением на $[E:F]$.

Вычисление кольца Чжоу неособого многообразия - одна из интересных и важных задач алгебраической геометрии. К сожалению, класс многообразий, для которых эта задача решена, невелик. Несколько лет назад американский математик Р. Суон поставил задачу вычисления кольца Чжоу квадратичной гиперповерхности в проективном пространстве [5]. В работе [6] собраны результаты, полученные первым автором в этом направлении.

Пусть F - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2, φ - невырожденная квадратичная форма над F размерности $d+2$. Уравнение $\varphi = 0$ задает в проективном пространстве $\mathbb{P}_F^{d+1}$ неособую гиперповерхность $X = X(\varphi)$, называемую квадрикой, соответствующей форме φ. Ясно, что многообразие X не имеет рациональных точек в том и только в том случае, когда форма φ анизотропна. В § 1 показано, как вычисление кольца CH^*X сводится к случаю, когда форма φ является анизотропной. Таким образом, достаточно рассматривать анизотропные квадратичные формы, содержательная теория которых возможна, разумеется, только для алгебраически незамкнутых полей. По этой причине мы рассматриваем квадрики над произвольным полем, и ответ в задаче вычисления кольца Чжоу квадрики, очевидно, должен зависеть от арифметики этого поля.

В работе [6] вычислены кольца Чжоу проективных квадрик, размерность которых не превосходит 4. При этом обнаружен интересный эффект - наличие кручения в некоторых группах Чжоу (см. § 1), причем задача вычисления кольца Чжоу сводится к нахождению этого кручения. Однако во всех случаях ненулевая группа TCH^pX оказывается изоморфной $\mathbb{Z}/2$. Возникает естественный вопрос, верно ли аналогичное утверждение для квадрик больших размерностей. Отрицательный ответ на этот вопрос был получен вторым автором (§ 5): ему удалось обнаружить в группе Чжоу CH^4X некоторой 5-мерной квадрики X два различных элемента второго порядка. На основе этого результата первый автор показал, что для любого $p \geq 4$ группа TCH^pX будет иметь сколь угодно большую мощность при подходящем выборе поля F и квадрики X над F (§ 6). Это обстоятельство практически не оставляет надежды на получение окончательного ответа в задаче вычисления кольца Чжоу проективной квадрики размерности большей 4.

В работе приняты следующие обозначения и соглашения. Мы говорим, что расширение полей E/F расщепляет квадратичную форму φ, если форма $\varphi_E = \varphi\otimes_F E$ изотропна. „Диагональная" квадратическая форма $a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_nx_n^2$ обозначается $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$; $D(\varphi)$ - множество ненулевых значений формы φ. Квадратичная форма $\langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle\rangle = \langle 1,-a_1\rangle\otimes \langle 1,-a_2\rangle\otimes\ldots\otimes\langle 1,-a_n\rangle$ называется n-формой Пфистера. Следующие три условия эквивалентны [7]:

1) форма $\langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle\rangle$ изотропна;

2) форма $\langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle\rangle$ гиперболична;

3) $a_n\in D$ $(\langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\rangle\rangle)$.

Формы φ_1 и φ_2 над полем F называются пропорциональными, если $\varphi_1\simeq c\varphi_2$ для некоторого $c\in F^*$. Пропорциональные квадратичные формы определяют изоморфные квадрики.

§ 1. Группы Чжоу проективных квадрик: обзор результатов

В этом параграфе перечислим некоторые результаты работы [6] о группах Чжоу проективных квадрик. Фиксируем обозначения: F - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2; φ - квадратичная форма над полем F размерности $d+2$; X - d-мерная проективная квадрика, соответствующая форме φ. Ясно, что многообразие X неособо тогда и только тогда, когда квадратичная форма φ невырождена.

(1.1). Редукция к невырожденному случаю. Вычисление групп Чжоу произвольной проективной квадрики сводится к случаю неособой квадрики следующим образом. Пусть ψ - невырожденная часть формы φ, Y - проективная квадрика, соответствующая ψ. Имеют место канонические изоморфизмы: $\mathrm{CH}^pX \simeq \mathrm{CH}^pY$ при $p \le \dim Y$; $\mathrm{CH}_pX \simeq \mathrm{CH}_p(\mathbb{P}^{n-1})$ при $p\le n-1$, где $n=\dim\varphi - \dim\psi$ - размерность радикала. Опишем их построение. Многообразие X в проективном пространстве $\mathbb{P}^{d+1}$ является конусом над Y с вершиной $\mathbb{P}^{n-1}$. Выкидывая вершину, получаем векторное расслоение $j\colon X\setminus\mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow Y$. Цепочка морфизмов $Y \xleftarrow{j} X\setminus\mathbb{P}^{n-1} \xhookrightarrow{i} X$ дает цепочку изоморфизмов $\mathrm{CH}^pY \xrightarrow[\sim]{j^*} \mathrm{CH}^p(X\setminus\mathbb{P}^{n-1}) \xleftarrow[\sim]{i^*} \mathrm{CH}^pX$ при $p \le \dim Y$. Изоморфизм $\mathrm{CH}_p(\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_pX$ (для $p\le n-1$) индуцирован замкнутым вложением $\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow X$.

Далее в этом параграфе рассматриваем только невырожденные квадратичные формы и неособые квадрики. Через $h\in\mathrm{CH}^1X$ обозначаем класс гиперплоского сечения (более точно, h - обратный образ класса гиперплоскости относительно вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{d+1}$).

(1.2). Случай полностью расщепленной формы. Обозначим через m целую часть числа $(d+1)/2$. Пусть сперва d нечетно, $\varphi = x_0x_1+ \ldots + x_{d-1}x_d + x_{d+1}^2$. Квадрика X содержит $(m-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^{m-1}$ (определяемое, скажем, уравнениями $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots = x_{d+1} = 0$) и вместе с ним проективные пространства всех меньших размерностей; пусть $l_p\in\mathrm{CH}_pX$ - класс $\mathbb{P}^p\subset X$. Тогда $\mathrm{CH}^pX=\mathbb{Z}\cdot h^p, \mathrm{CH}_pX=\mathbb{Z}\cdot l_p$ для $p<m$. Если же d четно, $\varphi = x_0x_1+ \ldots + x_{d-2}x_{d-1} + x_dx_{d+1}$, то циклы $x_0=x_2=x_4=$

$= \ldots = x_d=0$ и $x_1=x_2=x_4=\ldots=x_d=0$ неэквивалентны; пусть l_m, $l'_m\in \mathrm{CH}_m X$ - их классы. Тогда $\mathrm{CH}_m X = \mathbb{Z}\cdot l_m \oplus \mathbb{Z}\cdot l'_m$, а для $p<m$ по-прежнему $\mathrm{CH}^p X = \mathbb{Z}\cdot h^p$, $\mathrm{CH}_p X = \mathbb{Z}\cdot l_p$. Умножение в $\mathrm{CH}^* X$ описывается формулами $hl_p = l_{p+1}$;

$$h^m = \begin{cases} 2l_{m-1}, & \text{если } d \text{ нечетно;} \\ l_m + l'_m, & \text{если } d \text{ четно.} \end{cases}$$

(1.3). Редукция к анизотропному случаю. Вычисление групп Чжоу произвольных квадрик сводится к анизотпропному случаю следующим приемом. Пусть $\varphi = \psi \perp n\mathbb{H}$, где ψ - анизотропная часть, $\mathbb{H}$ - гиперболическая плоскость, n - индекс Витта формы φ; Y - квадрика, соответствующая φ ($\dim Y = d-2n$); $\bar{X} = X_E$, где E/F - какое-либо полностью расщепляющее φ расширение. Тогда для $p<n$ гомоморфизмы $\mathrm{res}: \mathrm{CH}^p X \longrightarrow \mathrm{CH}^p \bar{X}$, $\mathrm{res}: \mathrm{CH}_p X \longrightarrow \mathrm{CH}_p \bar{X}$ являются изоморфизмами; для $p = n, n+1, \ldots, d-n$ группа $\mathrm{CH}^p X$ канонически изоморфна $\mathrm{CH}^{p-n} Y$.

(1.4). Несложно описать фактор-группы групп Чжоу по кручению $\overline{\mathrm{CH}}^p X$. Для квадрики X без рациональных точек $\overline{\mathrm{CH}}^p X = \mathbb{Z}\cdot h^p$ при $p \neq d/2$. Группа $\overline{\mathrm{CH}}^{d/2} X$ (при четном d) изоморфна либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ (более точное описание см. в [6]). Поэтому группа $\mathrm{CH}^p X$ изоморфна прямой сумме $\mathrm{TCH}^p X \oplus \overline{\mathrm{CH}}^p X$ и, следовательно, вычисление группы $\mathrm{CH}^p X$ сводится к определению группы кручения $\mathrm{TCH}^p X$.

(1.5). Разумеется, наибольшие трудности при вычислении кольца Чжоу квадрики представляет нахождение подгруппы кручения $\mathrm{TCH}^* X$. При каждом p группа $\mathrm{TCH}^p X$ 2-примарна. Группы $\mathrm{TCH}^0 X$ и $\mathrm{TCH}^1 X$ всегда равны нулю. Группа $\mathrm{TCH}^2 X$ изоморфна $\mathbb{Z}/2$, если форма φ анизотропна, имеет размерность больше 4 и пропорциональна подформе 3-формы Пфистера; в остальных случаях $\mathrm{TCH}^2 X = 0$. Наконец, группа $\mathrm{TCH}^3 X$ конечна для любой квадрики; если $d\le 7$, то $\mathrm{TCH}^3 X=0$ или $\mathbb{Z}/2$. О группах $\mathrm{TCH}^p X$ при $p\ge 4$ известно очень мало. Основной результат настоящей статьи - теорема 6.5 - свидетельствует о весьма сложном их строении и практически не оставляет надежд на возможность их вычисления для произвольной квадрики.

(1.6). Приведем последний результат, касающийся произвольной квадрики, - описание нульмерной группы Чжоу. Гомоморфизм степени $\deg: \mathrm{CH}_0 X \longrightarrow \mathbb{Z}$ инъективен; его образ равен $\mathbb{Z}$, если φ изотропна, и $2\mathbb{Z}$ - в противном случае.

(1.7). Пусть φ - 4-мерная форма определителя 1. Опишем группу классов дивизоров $\mathrm{CH}^1 X$. С точностью до пропорциональности φ имеет вид « a,b » и либо гиперболична, либо анизотропна. Хотя гиперболический случай разобран в 1.1, сделаем относительно двумерной квадрики несколько дополнительных замечаний. Квадрика $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ совпадает с образом вложения Сегре $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ и содержит два однопараметрических семейства прямых: $\mathbb{P}^1\times pt$ и $pt\times\mathbb{P}^1$. Две прямые из одного семейства скрещиваются, из разных - пересекаются. Классы всех прямых одного из этих семейств равны элементу $l_1\in\mathrm{CH}^1 X$, введенному в 1.1, другого - l'_1. Таким образом, $\mathrm{CH}^1 X$ порождается классами любых двух пересекающихся прямых. Пусть теперь форма $\varphi = x_0^2-ax_1^2-bx_2^2+abx_3^2$ анизотропна. Гомоморфизм $\mathrm{res}: \mathrm{CH}^1 X \longrightarrow \mathrm{CH}^1 \bar{X} = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

отождествляет CH^1X с подгруппой элементов из $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ с четной суммой координат. Рассмотрим простой цикл Z коразмерности 1, заданный уравнениями $x_0^2-ax_1^2=0$, $x_0x_3-x_1x_2 = 0$. Выписанные уравнения определяют в $\bar{X}$ две скрещивающиеся прямые, заданные парами уравнений $x_0=\sqrt{a}\,x_1$, $x_2=\sqrt{a}\,x_3$ и $x_0=-\sqrt{a}\,x_1$, $x_2=-\sqrt{a}\,x_3$ и определенные над полем $F(\sqrt{a})$. Эти прямые перестановочные под действием образующей группы Галуа расширения $F(\sqrt{a})/F$. Поэтому группа CH^1X порождается элементами $[Z]$ и $h = (1,1)$ (гиперплоское сечение квадрики $\bar{X}$ эквивалентно сумме двух пересекающихся прямых).

(1.8). Цикл „двойная прямая". Предположим, что $\dim\varphi\geq5$. Сопоставим каждой 4-мерной подформе определителя 1 формы φ (если такие имеются) одномерный простой цикл Z на X. Если, скажем, $\varphi = x_0^2-ax_1^2-bx_2^2+abx_3^2+\varphi(y_i)$, то определим Z уравнениями $x_0^2-ax_1^2=0$, $x_0x_3-x_1x_2=0$, $y_i=0$ (для всех i). Цикл Z, который мы будем называть циклом „двойная прямая" (мотивировка такого названия содержится в п. 1.7), будет играть ключевую роль в дальнейшем изложении. Вот его главное свойство.

Л е м м а. *Положим* $\xi = [Z] - h^{d-1}\in CH_1X$. *Тогда* $2\xi=0$; *кроме того, если* φ *анизотропна, то* $\xi \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E/F - квадратичное расширение, полностью расщепляющее 4-мерную подформу, по которой построен Z. Тогда $\mathrm{res}_{E/F}([Z]) = \mathrm{res}_{E/F}(h^{d-1}) = 2l_1\in CH_1X_E$, т.е. $\mathrm{res}_{E/F}(\xi)=0$. Следовательно, $2\xi = N_{E/F}\circ\mathrm{res}_{E/F}(\xi)=0$. Утверждение о том, что в анизотропном случае $\xi\neq0$, доказано в [6].

Итак, мы научились по каждой 4-мерной подформе определителя 1 формы φ (если $\dim\varphi\geq5$) строить элемент кручения в CH_1X, отличный от нуля, если φ анизотропна.

(1.9). Квадрики размерности не выше 4. Кольцо Чжоу квадрики, размерность которой не превосходит 4, полностью вычислено в [6]. Приведем описание группы TCH_1X. Для коники и для квадратичной поверхности группа TCH_1X равна нулю. Пусть размерность X равна 3 и 4. Тогда $TCH_1X=\mathbb{Z}/2$, если φ анизотропна и содержит 4-мерную подформу определителя 1; $TCH_1X=0$ - в противном случае. Ясно, что ненулевой элемент группы TCH_1X - это элемент кручения, построенный в 1.8; если φ содержит несколько 4-мерных подформ определителя 1, то соответствующие элементы кручения равны. Отметим, что последнее утверждение перестает быть верным уже для 5-мерной квадрики (теорема 5.1).

(1.10). В заключение параграфа приведем одно утверждение, легко доказываемое с помощью результатов [6]. Пусть $\dim X=5$, квадратичная форма φ содержит 4-мерную подформу определителя 1, индекс алгебры $C_0(\varphi)$ равен 4 ($C_0(\varphi)$ - четная часть алгебры Клиффорда $C(\varphi)$ формы φ; $C_0(\varphi)$ является центральной простой F-алгеброй, если размерность φ нечетна [7]). Тогда $TCH^3X=0$.

§ 2. Локальные системы

Пусть F - произвольное поле. Будем рассматривать неприводимые алгебраические многообразия над полем F, называя их для краткости просто многообразиями.

Множество точек многообразия X, имеющих коразмерность p (размерность p), обозначим X^p (соответственно X_p).

Определение. *Будем говорить, что на многообразии X задана локальная система (абелевых групп) V_*, если*

1) *для каждой точки $x\in X$ задан набор абелевых групп $V_n(x)$, $n\in\mathbb{Z}$, причем $V_n(x)=0$ при $n<0$;*

2) *для каждой пары $x\in X^p$, $x'\in X^{p+1}$ заданы гомоморфизмы $d_{xx'}: V_n(x) \longrightarrow V_{n-1}(x')$, причем $d_{xx'}=0$, если x не специализируется в x' (т.е. x' не принадлежит замыканию множества $\{x\}$);*

3) *для любой точки $x\in X^p$ и любого $v\in V_n(x)$ множество $\{x'\in X^{p+1} | d_{xx'}(v) \neq 0\}$ конечно; в частности, гомоморфизмы $d_{xx'}$ индуцируют гомоморфизм d_n^p: $\coprod_{x\in X^p} V_{n-p}(x) \longrightarrow$ $\longrightarrow \coprod_{x\in X^{p+1}} V_{n-p-1}(x)$;*

4) *для любых точек $x\in X^{p-1}$, $z\in X^{p+1}$ выполняется равенство $\sum_{y\in X^p} d_{yz} \circ d_{xy} = 0$, левая часть которого имеет смысл в силу 3.*

П.4 означает, что для каждого n набор групп $V_n^p = \coprod_{x\in X^p} V_{n-p}(x)$ и гомоморфизмов d_n^p (при переменном p) является комплексом, который мы обозначим $V_n^{\cdot}$. Группы когомологий $H^p(V_n^{\cdot})$ комплекса $V_n^{\cdot}$ будем обозначать $H^p(X,V_n)$ или $H_{d-p}(X,V_{n-d})$, где $d=\dim X$, и называть группами V-когомологий многообразия X. Ясно, что $H^p(X,V_n)=0$ при $p>n$ или $p>d$.

Пусть V_*, V'_* - локальные системы на X. Морфизм локальных систем $V_* \longrightarrow V'_*$ - это набор гомоморфизмов $V_n(x)\longrightarrow V'_n(x)$ для каждых n,x, согласованный с гомоморфизмами $d_{xx'}$. Морфизм $V_* \longrightarrow V'_*$ индуцирует гомоморфизм групп когомологий $H^p(X,V_n) \longrightarrow H^p(X,V'_n)$.

Пример 2.1. На произвольном многообразии X определим локальную систему K_*. Пусть $K_n(x)=K_n(F(x))$ - n-я K-группа Квиллена поля вычетов $F(x)$ точки $x\in X$. Гомоморфизмы $d_{xx'}: K_n(F(x)) \longrightarrow K_{n-1}(F(x'))$ определяются стандартным образом [2]. При этом $H^p(X,K_p)=CH^pX$ - группа Чжоу коразмерности p.

Пример 2.2. Аналогично определим локальную систему K_*^M, взяв в качестве $K_n^M(x)$ n-ю K-группу Милнора $K_n^M(F(x))$ [8-10]. Стандартный гомоморфизм из K-группы Милнора в K-группу Квиллена определяет морфизм локальных систем $K_*^M \longrightarrow$ $\longrightarrow K_*$. Возникающие отображения групп когомологий $H^p(X,K_{p+i}^M) \longrightarrow H^p(X,K_{p+i})$ являются изоморфизмами при $i = 0,1,2$. В частности, $H^p(X,K_p^M)=CH^pX$.

Пусть V_* - локальная система на X и $Y\subset X$ - подмногообразие. Ограничение $V_*|_Y$, очевидно, является локальной системой на Y. Группы когомологий $H^p(V,(V_*|_Y)_n)$ будем обозначать сокращенно $H^p(Y,V_n)$.

Предложение 2.3. *Пусть V_* - локальная система на X, $Y\subset X$ - замкнутое подмногообразие коразмерности m, $U = X\setminus Y$. Тогда для каждого n имеется точная последовательность групп когомологий*

$$\ldots \longrightarrow H^{p-m}(Y, V_{n-m}) \longrightarrow H^p(X, V_n) \longrightarrow H^p(U, V_n) \longrightarrow H^{p-m+1}(Y, V_{n-m}) \longrightarrow \ldots$$

Доказательство. Для каждого p множество X^p является дизъюнктным объединением множеств U^p и Y^{p-m}. Точная последовательность когомологий возникает из короткой точной последовательности комплексов

$$0 \longrightarrow (V_*|_Y)^{\cdot}_{n-m} \longrightarrow V^{\cdot}_n \longrightarrow (V_*|_U)^{\cdot}_n \longrightarrow 0.$$

Пример 2.4. В условиях предложения 2.3 возьмем $V_*=K_*$ (или K^M_*). Конец возникающей K-когомологической последовательности совпадает с известной точной последовательностью для групп Чжоу $\mathrm{CH}^{n-m}Y \longrightarrow \mathrm{CH}^nX \longrightarrow \mathrm{CH}^nU \longrightarrow 0$.

§ 3. Спектральная последовательность, связанная с плоским морфизмом

Теорема 3.1. *Пусть $\pi: X \longrightarrow Y$ - плоский морфизм многообразий, V_* - локальная система на X. Для каждого целого n имеется спектральная последовательность* $E_1^{p,q}(n) = \coprod_{y\in Y^p} H^q(X_y, V_{n-p}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, V_n)$, *где X_y - слой морфизма π над точкой y; эта спектральная последовательность сосредоточена в пределах* $0\le p\le \dim Y$, $0\le q\le \dim X - \dim \overline{f(X)}$, $p+q\le n$.

Доказательство. Введем на комплексе $V^{\cdot}_n$ фильтрацию, положив $F^p(V^i_n) = \coprod_{x\in X^n,\ \mathrm{codim}_Y \pi(x)\ge p} V_{n-i}(x) \subset V^i_n$ при каждом p, i. Эта фильтрация, очевидно, ограничена и согласована с дифференциалом, следовательно, индуцирует спектральную последовательность $E_1^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(X, V_n)$ [11]. Вычислим первый член $E_1^{p,q}$ этой спектральной последовательности. Так как морфизм π плоский, то для любой точки $y\in Y^p$ имеем $X^i \cap X_y = X_y^{i-p}$ [1], откуда

$$F^{p/p+1}V^i_n = \coprod_{x\in X^i,\ \pi(x)\in Y^p} V_{n-i}(x) = \coprod_{y\in Y^p} \coprod_{x\in X_y^{i-p}} V_{n-i}(x),$$

т.е.

$$F^{p/p+1}V^{\cdot}_n = \coprod_{y\in Y^p} (V_*|_{X_y})^{\cdot -p}_{n-p}.$$

Следовательно,

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^{p/p+1}V^{\cdot}_n) = \coprod_{y\in Y^p} H^q(X_y, V_{n-p}).$$

Утверждение теоремы о расположении спектральной последовательности очевидно, если учесть, что слой плоского морфизма π над произвольной точкой имеет размерность $\dim X - \dim \overline{f(X)}$, если непуст.

Дополнительно отметим, что дифференциал в члене E_1 определяет локальную систему $H^q(\pi, V_*)$ на Y при помощи равенства $H^q(\pi, V_n)(y)=H^q(X_y, V_n)$, причем $H^q(\pi, V_n)^{\cdot} = E_1^{\cdot,q}$. Следовательно, $E_2^{p,q} = H^p(H^q(\pi, V_n)^{\cdot}) = H^p(Y, H^q(\pi, V_n))$.

§ 4. Группы $D_n(\varphi)$

Начиная с этого места рассматриваются только те поля, характеристика которых не равна 2. Пусть φ - произвольная (возможно, вырожденная) квадратичная форма над полем F, $X(\varphi)$ - соответствующая проективная квадрика. Рассмотрим гомоморфизм N : : $H_0(X(\varphi),K_n) \longrightarrow K_n(F)$, индуцированный гомоморфизмом $\coprod_{x\in X(\varphi)_0} K_n(F(x)) \longrightarrow$ $\longrightarrow K_n(F)$, отображающим $K_n(F(x))$ в $K_n(F)$ при помощи отображения нормы $N_{F(x)/F}$. Определим группу $D_n(\varphi)$, положив $D_n(\varphi) = \operatorname{Im} N \subset K_n(F)$. Очевидно, что $D_n(\varphi)=K_n(F)$, если форма φ изотропна. Эпиморфизм $N : H_0(X(\varphi),K_n) \longrightarrow D_n(\varphi)$ совпадает при $n = 0$ с гомоморфизмом степени и является ввиду 1.1 и 1.6 изоморфизмом.

Л е м м а 4.1. *Пусть U - аффинная квадрика, заданная уравнением $\varphi = c$, где $c\in F$. Имеется канонический эпиморфизм $H_0(U,K_n) \longrightarrow D_n(\varphi \perp \langle -c\rangle)/D_n(\varphi)$, являющийся при $n = 0$ изоморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Искомый эпиморфизм возникает из следующей коммутативной диаграммы с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_0(X(\varphi),\ K_n) & \longrightarrow & H_0(X(\varphi\perp\langle -c\rangle),\ K_n) & \longrightarrow & H_0(U,K_0) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
D_n(\varphi) & \longrightarrow & D_n(\varphi\perp\langle -c\rangle) & \longrightarrow & D_n(\varphi\perp\langle -c\rangle)/D_n(\varphi) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

При $n=0$ обе вертикальные стрелки становятся изоморфизмами, откуда следует второе утверждение леммы.

Л е м м а 4.2. *Группа $D_n(\varphi)$ совпадает с образом гомоморфизма $N'\colon \coprod K_n(E) \longrightarrow$ $\longrightarrow K_n(F)$, где суммирование ведется по всем конечным расширениям E/F, расщепляющим φ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку поле вычетов любой точки $x\in X(\varphi)_0$ расщепляет φ, включение $D_n(\varphi)\subset \operatorname{Im} N'$ очевидно. Наоборот, если E/F - расщепляющее φ расширение, то $E\supset F(x)$ для некоторой $x\in X(\varphi)_0$, что доказывает обратное включение.

Л е м м а 4.3. *Пусть φ - форма Пфистера, ψ - подформа φ, причем $\dim \psi > \dim \varphi/2$. Тогда $D_n(\varphi)=D_n(\psi)$ при всех n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что у форм φ и ψ одинаковые поля расщепления, и воспользуемся леммой 4.2.

Л е м м а 4.4. (см. [12]). *Если φ - форма Пфистера, то $D_1(\varphi)=D(\varphi)$.*

З а м е ч а н и е. Для произвольной квадратичной формы φ можно аналогично определить группы $D_n^M(\varphi)\subset K_n^M(F)$: $D_n^M(\varphi)=\operatorname{Im}\ (N\colon H_0(X(\varphi),K_n^M) \longrightarrow K_n^M(F))$. Группы $D_n^M(\varphi)$ и $D_n(\varphi)$ совпадают при $n=0,1,2$; кроме того, свойства 4.1 - 4.4 групп D_n выполняются и для D_n^M. Всюду в дальнейшем изложении K_n и D_n можно заменить на K_n^M и D_n^M.

В заключении параграфа построим с помощью введенных групп важный пример локальной системы на многообразии.

П р и м е р 4.5. Пусть X - произвольное многообразие, φ - квадратичная форма над кольцом регулярных функций $\Gamma(X,\vartheta_X)$ многообразия X, скажем, $\varphi=\langle f_1,f_2,\dots,f_k\rangle$, где $f_1, f_2, \dots, f_k$ - регулярные функции на X. Для каждой точки $x \in X$ получаем квадратичную форму $\varphi_x = \langle f_1(x), \dots, f_k(x) \rangle$ (возможно, вырожденную) над полем $F(x)$. Группы $D_n(\varphi_x)$ образуют в локальной системе K_* подсистему, которую мы будем обозначать $D_*(\varphi)$. Таким образом, $D_n(\varphi)(x)$ есть по определению $D_n(\varphi_x)$.

Л е м м а 4.6. (см. [2])

$$H^p(\mathbb{A}^n_F,\ K_m) = \begin{cases} 0, & \textit{если } p>0; \\ K_m(F), & \textit{если } p=0. \end{cases}$$

Л е м м а 4.7. *Пусть L - поле дискретного нормирования с полем вычетов E, F - подполе в кольце целых элементов поля L, φ - квадратичная форма над полем F. Если форма φ_L изотропна, то форма φ_E также изотропна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. По условию $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i^2 = 0$ для некоторых элементов $f_i \in L$, не все из которых равны 0, причем можно считать, что элементы f_i целы и хотя бы один из них имеет ненулевой вычет $\bar{f}_i \in E^*$. Следовательно, равенство $\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{f}_i^2 = 0$ показывает, что форма φ_E изотропна.

С л е д с т в и е 4.8. *Пусть Y - многообразие над полем F, $y \in Y$ - неособая точка, φ - квадратичная форма над F. Если форма $\varphi_{F(Y)}$ изотропна, то форма $\varphi_{F(y)}$ также изотропна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как точка y неособа, то найдется последовательность полей $L_0 = F(Y)$, $L_1, L_2, \dots, L_n = F(y)$, где $n = \operatorname{codim} y$, причем для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$ поле L_i обладает дискретным нормированием с полем вычетов L_{i+1}. Осталось применить лемму 4.7 n раз.

Л е м м а 4.9. *Пусть φ - квадратичная форма над полем F. Тогда если рассматривать φ как квадратичную форму над кольцом регулярных функций аффинного пространства $\mathbb{A}^n_F$, то*

$$H^p(\mathbb{A}^n_F,\ D_m(\varphi)) = \begin{cases} D_m(\varphi), & \textit{если } p=0; \\ 0, & \textit{если } p>0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукция по числу n. Рассмотрим сначала случай $n=1$. Утверждение леммы тривиально при $p>1$. В случае $p=1$ достаточно заметить, что группа $H^1, (\mathbb{A}^1_F,\ D_m(\varphi))$ порождается образами гомоморфизмов нормы $H^1(\mathbb{A}^1_E, K_m) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}^1_F, D_m(\varphi))$, где E пробегает множество конечных расширений поля F, расщепляющих форму φ, а также то, что группа $H^1(\mathbb{A}^1_E, K_m)$ нулевая по лемме 4.6.

Пусть теперь $p=0$. Нам нужно показать, что $H^0(\mathbb{A}^1_F, D_m(\varphi)) = D_m(\varphi)$, т.е. $D_m(\varphi_L) \cap K_m(F) = D_m(\varphi)$, где $L = F(\mathbb{A}^1)$. Рассмотрим гомоморфизм специализации в рациональной точке $x \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$:

$$s_x\colon\ K_m(L) \longrightarrow K_m(F),$$

определенный по формуле $s_x(u) = \partial_x(\{\pi_x\} \cdot u)$, где π_x - какой-либо простой элемент в локальном кольце точки x и ∂_x: $K_{m+1}(L) \longrightarrow K_m(F)$ - „вычет" в точке x [2]. Так как композиция

$$K_m(F) \longrightarrow K_m(L) \xrightarrow{s_x} K_m(F)$$

совпадает с тождественным гомоморфизмом, то нам достаточно показать, что $s_x(D_m(\varphi_L)) \subset D_m(\varphi)$.

Пусть E/L - конечное расширение, расщепляющее форму φ_L. По лемме 4.2 достаточно показать, что

$$s_x(N_{E/L}(K_m(E))) \subset D_m(\varphi).$$

Пусть Y - неособая проективная кривая и $\pi: Y \to \mathbb{P}^1$ - сюръективный морфизм такие, что расширение полей $F(Y)/F(\mathbb{P}^1)$ изоморфно расширению E/L. Из коммутативной диаграммы [2]

$$\begin{array}{ccc} K_{m+1}F(Y) & \xrightarrow{N} & K_{m+1}F(\mathbb{P}^1) \\ \downarrow \amalg \partial_y & & \downarrow \partial_x \\ \coprod\limits_{\pi(y)=x} K_m F(y) & \xrightarrow{\sum N_{F(y)/F}} & K_m F \end{array}$$

находим, что $s_x(N(u)) = \partial_x(\{\pi_x\} \cdot N(u)) = \partial_x(N(\{\pi_x\} \cdot u)) = \sum\limits_{\pi(y)=x} N_{F(y)/F}(\partial_y(\{\pi_x\} \cdot u))$ для любого $u \in K_m F(Y)$. Следствие 4.8 утверждает, что расширение $F(y)/F$ расщепляет форму φ для любой точки $y \in Y$. Поэтому опять по лемме 4.2 получаем $s_x(N(u)) \in D_m(\varphi)$, что и требовалось доказать.

Индукционный переход $n-1 \Longrightarrow n$. Рассмотрим спектральную последовательность 3.1 для проекции $\pi: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$:

$$E_1^{p,q} = \coprod_{y \in (\mathbb{A}^{n-1})^p} H^q(\mathbb{A}^1_{F(y)},\ D_{m-p}(\varphi)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbb{A}^n_F,\ D_m(\varphi)).$$

По доказанному выше $E_1^{p,q}=0$ при $q \geq 1$ и $E_1^{\cdot,0} = D_m(\varphi)^{\cdot}$. Поэтому $H^i(\mathbb{A}^n_F,\ D_m(\varphi)) = E_2^{i,0} = H^i(\mathbb{A}^{n-1}_F,\ D_m(\varphi))$, и мы можем применить индукционное предположение.

§ 5. Группа CH_1 для квадрики

Этот параграф посвящен доказательству следующего утверждения.

Т е о р е м а 5.1. *Пусть Q - проективная 5-мерная квадрика над полем F, заданная формой $\langle 1, -a, -b, ab, -c, -d, cd \rangle$ $(a,b,c,d \in F^*)$; $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{TCH}_1 Q$ - элементы кручения, соответствующие 2-подформам Пфистера* «a,b» *и* «c,d» *в смысле* 1.8. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $\xi_1 = \xi_2$;

2) *существуют такие* $\lambda, \mu \in F^*$, *что* «a,b,λ» $\simeq$ «c,d,μ» *и* «a,b,c,d» $\simeq$ «$-1,a,b,\lambda$».

В случае, если $-1 \in F^{*2}$, формулировка теоремы значительно упрощается.

С л е д с т в и е 5.2. *Если в условиях теоремы дополнительно предположить,* *что* $-1\in F^{*2}$, *то* $\xi_1=\xi_2$ *тогда и только тогда, когда 4-форма Пфистера* $\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle$ *гиперболична.*

Доказательство леммы. Если $-1\in F^{*2}$, то из условия 2 теоремы следует, очевидно, что форма $\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle$ гиперболична. Наоборот, если форма $\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle$ гиперболична, то выполняется условие 2, так как можно взять $\lambda=\mu=1$.

Лемма 5.3. *Если U - аффинная квадрика, заданная уравнением $\langle\langle a,b\rangle\rangle=c$, где $a,b\in F^*$, $c\in F$, то* $\mathrm{CH}_1U=0$.

Доказательство. Имеем точную последовательность $\mathrm{CH}_1Y \longrightarrow \mathrm{CH}_1X \longrightarrow \mathrm{CH}_1U \longrightarrow 0$, где X,Y - проективные квадрики, соответствующие формам $\langle\langle a,b\rangle\rangle\perp\langle -c\rangle$ и $\langle\langle a,b\rangle\rangle$. Если $c\neq 0$, то X невырождена, и равенство $\mathrm{Coker}\ (\mathrm{CH}_1Y\longrightarrow\mathrm{CH}_1X)=0$ легко получить, используя результаты из § 1. При $c=0$ группа CH_1X изоморфна, согласно 1.1, группе CH_0Y, и композиция $\mathrm{CH}_1Y \longrightarrow \mathrm{CH}_1X \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{CH}_0Y$ совпадает с умножением на h. Равенство $\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_1Y\xrightarrow{h}\mathrm{CH}_0Y)=0$ следует из 1.6 и 1.7.

Пусть ψ - n-мерная квадратичная форма над F $(n\geq 2)$; $a,b,c\in F^*$; $\varphi=\langle\langle a,b\rangle\rangle\perp(-\psi)$; U - аффинная квадрика размерности $n+3$, определенная уравнением $\varphi=e$. Примем сокращенное обозначение $D_m(a_1,a_2,\dots,a_k)=D_m(\langle\langle a_1,a_2,\dots,a_k\rangle\rangle)$ (см. § 4).

Предложение 5.4. *Рассмотрим ψ как регулярную функцию на $\mathbb{A}^n=\mathbb{A}^n_F$. Тогда* $\mathrm{CH}_1U=H^{n-1}(\mathbb{A}^n,\ D_{n-1}(a,b,\psi+e))$.

Доказательство. Рассматривая ψ как функцию на $\mathbb{A}^n$, мы получаем плоский морфизм $\pi\colon U\longrightarrow\mathbb{A}^n$, слоем которого над произвольной точкой $v\in\mathbb{A}^n$ является трехмерная аффинная (возможно, вырожденная) квадрика U_v, заданная над полем $F(v)$ уравнением $\langle\langle a,b\rangle\rangle=\psi(v)+e$. По теореме 3.1 имеем спектральную последовательность

$$E_1^{p,q} = \coprod_{v\in(\mathbb{A}^n)^p} H^q(U_v,\ K_{n+2-p}) \Longrightarrow H^{p+q}(U,\ K_{n+1}).$$

Нас интересует группа $\mathrm{CH}_1U=H^{n+2}(U,\ K_{n+2})$. На диагонали $p+q=n+2$ имеется только две априори ненулевые группы - $E_1^{n,2}$ и $E_1^{n-1,3}$. Однако $E_1^{n,2}=\coprod \mathrm{CH}^2U_v=0$ по лемме 5.3. Отсюда, так как $E_1^{p,q}=0$ при $q>3$ или $p+q>n+2$, получаем

$$\mathrm{CH}_1U = H^{n+2}(U,K_{n+2}) = E_\infty^{n-1,3} = E_2^{n-1,3}= \mathrm{Coker}\ (E_1^{n-2,3} \xrightarrow{d_1} E_1^{n-1,3}).$$

По лемме 4.1, учитывая лемму 4.3, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E_1^{n-2,3} = \coprod\limits_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-2}} H^3(U_v,\ K_4) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, two heads] & \coprod\limits_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-1}} H^3(U_v,K_3) = E_1^{n-1,3} \arrow[d, "\wr"] \\
\coprod\limits_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-2}} \dfrac{D_1(a,b,\psi(v)+e)}{D_1(a,b)} \arrow[r] & \coprod\limits_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-1}} \dfrac{D_0(a,b,\psi(v)+e)}{D_0(a,b)}
\end{tikzcd},$$

в которой левая вертикальная стрелка является эпиморфизмом, а правая -

изоморфизмом. Следовательно, коядра горизонтальных стрелок канонически изоморфны. Учитывая, что

$$\mathrm{Coker}\left(\coprod_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-2}} D_1(a,b) \longrightarrow \coprod_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-1}} D_0(a,b)\right) = H^{n-1}(\mathbb{A}^n,\ D_{n-1}(a,b)) = 0$$

по лемме 4.9, окончательно получаем

$$\mathrm{CH}_1U = \mathrm{Coker}\left(\coprod_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-2}} D_1(a,b,\psi(v)+e) \longrightarrow \coprod_{v\in(\mathbb{A}^n)^{n-1}} D_0(a,b,\psi(v)+e)\right) =$$

$$= H^{n-1}(\mathbb{A}^n,\ D_{n-1}(a,b,\psi+e)),$$

и предложение доказано.

Рассмотрим теперь следующий частный случай. Пусть $a,b,c,d\in F^*$, $n=2$, $\psi=\langle c,d\rangle$, $e=-cd$, т.е. 5-мерная аффинная квадрика U задается уравнением

$$x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = cy^2 + dz^2 - cd.$$

Исследуем группу $\mathrm{CH}_1U = H^1(\mathbb{A}^2,\ D_1(a,b,cy^2+dz^2-cd))$ (мы считаем, что на $\mathbb{A}^2$ заданы координаты y и z). Спектральная последовательность групп D-когомологий, связанная с проекцией $\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1_z$, $(y,z) \longmapsto z$, дает точную последовательность

$$H^0(\mathbb{A}^1_{F(z)}, D_1(a,b,f)) \xrightarrow{\alpha} \coprod_{v\in(\mathbb{A}^1)^1} H^0(\mathbb{A}^1_{F(v)}, D_0(a,b,f(v))) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathbb{A}^2, D_1(a,b,f)),$$

где $f=cy^2+dz^2-cd$. Рассмотрим точку $w\in\mathbb{A}^1$, заданную уравнением $z^2=c$. Так как $F(w)=F(\sqrt{c})$ и $f(w)=cy^2=(\sqrt{c}\cdot y)^2$ – квадрат, то 3-форма Пфистера $\langle\langle a,b,f(w)\rangle\rangle$ гиперболична, т.е. $D_0(a,b,f(w)) = \mathbb{Z}$. Несложно вычислить образ элемента $1 \in \mathbb{Z} = H^0(\mathbb{A}^1_{F(w)},\ D_0(a,b,f(w)))$ при отображении β в группе $H^1(\mathbb{A}^2,\ D_1(a,b,f))=\mathrm{CH}_1U$: он равен классу кривой C на U, определенной уравнениями $x_1=x_2=x_3=0$, $z^2=c$, $x_0=yz$.

Предложение 5.5. *Цикл C рационально эквивалентен нулю на U, т.е. $[C]=0\in\mathrm{CH}_1U$, в том и только в том случае, когда найдутся такие $\lambda,\mu\in F^*$, что $\langle\langle a,b,\lambda\rangle\rangle \simeq \langle\langle c,b,\mu\rangle\rangle$ и $\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle \simeq \langle\langle -1,a,b,\lambda\rangle\rangle$.*

Доказательство. Ясно, что $[C]=0\in\mathrm{CH}_1U$ тогда и только тогда, когда элемент $1\in H^0(\mathbb{A}^1_{F(w)},\ D_0(a,b,f(w)))$ принадлежит образу гомоморфизма α. Так как при каждом $v\in\mathbb{A}^1$ группа $H^0(\mathbb{A}^1_{F(v)},\ D_0(a,b,f(v)))$ отождествляется с подгруппой в $\mathbb{Z}$, группа $H^0(\mathbb{A}^1_{F(z)},\ D_1(a,b,f))$ – с подгруппой $D_1(a,b,f)\cap F(z)^*$ в $F(z)^*$, а гомоморфизм α отождествляется с ограничением гомоморфизма $F(z)^* \longrightarrow \coprod_{v\in(\mathbb{A}^1)^1} \mathbb{Z}$, сопоставляющего каждой рациональной функции ее дивизор, на подгруппу $D_1(a,b,f)\cap F(z)^*$, то ясно, что $[C]=0\in\mathrm{CH}_1U$ тогда и только тогда, когда простой цикл w является дивизором некоторой функции из $D_1(a,b,f)\cap F(z)^*$, т.е. когда при некотором $e\in F^*$ функция $e(z^2-c)$ принадлежит $D_1(a,b,f)$. Так как $D_1(a,b,f)=D(a,b,f)$ по лемме 4.4, то последнее условие означает в точности, что 4-форма Пфистера $\langle\langle a,b,f,e(z^2-c)\rangle\rangle$ гиперболична [7], т.е. выполняются следующие условия [7].

1) Образ формы $\langle\langle a,b,f\rangle\rangle$ в поле функций кривой в $\mathbb{A}^2$, определяемой уравнением $z^2=c$, - гиперболическая форма.

2) Образ формы $\langle\langle a,b,e(z^2-c)\rangle\rangle$ в поле функций кривой в $\mathbb{A}^2$, определяемой уравнением $f=cy^2+dz^2-cd=0$, - гиперболическая форма.

3) Специализация формы $\langle\langle a,b,f,e(z^2-c)\rangle\rangle$ в какой-нибудь рациональной точке $v\in\mathbb{A}^2$ (например, заданной уравнениями $y=z=0$) - гиперболическая форма.

Условие 1 выполняется автоматически, так как если $z^2=c$, то $f=cy^2+dz^2-cd=cy^2=$ $=(zy)^2$ - квадрат. Условие 2 означает, что 3-форма Пфистера $\sigma=\langle\langle a,b,-cde\rangle\rangle$ гиперболична над универсальным полем расщепления квадратичной формы $\langle c,d,-cd\rangle$, т.е. класс формы σ в кольце Витта делится на класс формы $\langle\langle c,d\rangle\rangle$ ([13], Satz 2.1) и, следовательно, форма $\langle\langle c,d\rangle\rangle$ является тензорным сомножителем формы $\langle\langle a,b,-cde\rangle\rangle$ [7]: $\langle\langle a,b,-cde\rangle\rangle \simeq \langle\langle c,d,\mu\rangle\rangle$ при некотором $\mu\in F^*$. Наконец, условие 3 состоит в том, что форма $\langle\langle a,b,-cd,-ce\rangle\rangle$ гиперболична, т.е. $\langle\langle a,b,-cd,d\rangle\rangle \simeq \langle\langle a,b,-cd,-cde\rangle\rangle$. Полагая $\lambda=-cde$, получаем

$$\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle \simeq \langle\langle a,b,-cd,d\rangle\rangle \simeq \langle\langle a,b,-cd,\lambda\rangle\rangle \simeq$$

$$\simeq \langle\langle c,d,-cd,\mu\rangle\rangle \simeq \langle\langle c,d,-1,\mu\rangle\rangle \simeq \langle\langle a,b,-1,\lambda\rangle\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть Q' - гиперплоское сечение квадрики Q, соответствующее подформе $\langle 1,-a,-b,ab,-c,-d\rangle$. Аффинная квадрика $U=Q\setminus Q'$ подробно рассмотрена выше. Заметим, что ξ_1 принадлежит образу гомоморфизма $i_*:\mathrm{CH}_1Q'\longrightarrow\mathrm{CH}_1Q$, т.е. ограничение ξ_1 на U равно нулю. С другой стороны, ограничение ξ_2 на U равно $[C]$, где C - построенная выше кривая. Поэтому если $[C]\neq0$, то $\xi_1\neq\xi_2$. Если же $[C]=0$, то ξ_2 также принадлежит образу гомоморфизма i_*. Однако группа CH_1Q' изоморфна $\mathbb{Z}\cdot h^3$ или $\mathbb{Z}\cdot h^3\oplus\mathbb{Z}/2$, или $\mathbb{Z}\cdot l_1$ (см. § 1), так что подгруппа кручения в $\mathrm{Im}\ i_*$ равна 0 или $\mathbb{Z}/2$. Поэтому элементы кручения ξ_1 и ξ_2, принадлежащие $\mathrm{Im}\ i_*$, совпадают.

§ 6. Основная теорема

Пусть F - произвольное поле, содержащее $\sqrt{-1}$; $a_1,a_2,b_1,b_2\in F^*$; φ' - квадратичная форма $\langle a_1,a_2,a_1a_2,b_1,b_2,b_1b_2\rangle$, $\varphi=\langle 1\rangle\perp\varphi'$; U - аффинная квадрика, определенная уравнением $\varphi'=-1$ над полем F.

Лемма 6.1. $\mathrm{CH}^pU=0$ *при* $p=1,2,3$.

Доказательство. Пусть X и X' - проективные квадрики, определенные уравнениями $\varphi=0$ и $\varphi'=0$ соответственно. Используем результаты § 1 и точную последовательность

$$\mathrm{CH}^{p-1}X' \longrightarrow \mathrm{CH}^pX \longrightarrow \mathrm{CH}^pU \longrightarrow 0.$$

При $p=1$ сразу получаем $\mathrm{CH}^1U=0$, так как $\mathrm{CH}^1X=\mathbb{Z}\cdot h$ и $h\in\mathrm{Im}\ (\mathrm{CH}^0X'\longrightarrow\mathrm{CH}^1X)$. При $p=2$

точная последовательность показывает, что $CH^2U\neq0$ только, если $TCH^2X\neq0$. Последнее означает, согласно 1.5, что форма φ анизотропна и пропорциональна подформе 3-формы Пфистера, т.е. $\varphi\perp\langle\det\varphi\rangle$ - анизотропная 3-форма Пфистера. Однако форма $\varphi\perp\langle\det\varphi\rangle=$ $=\langle a_1,a_2,a_1a_2,b_1,b_2,b_1b_2,1,1\rangle$ содержит гиперболическую плоскость $\mathbb{H}=\langle1,1\rangle$, следовательно, изотропна, откуда $CH^2U=0$. Осталось рассмотреть группу CH^3U. Если форма φ' анизотропна, то алгебры кватернионов $\left(\frac{a_1,a_2}{F}\right)$ и $\left(\frac{b_1,b_2}{F}\right)$ не имеют общего квадратичного поля расщепления [7], поэтому индекс алгебры $C_0(\varphi)=C(\varphi')$, изоморфной алгебре матриц второго порядка над тензорным произведением $\left(\frac{a_1\ a_2}{F}\right)\otimes\left(\frac{b_1\ b_2}{F}\right)$ [7], равен 4 и, согласно 1.10, $TCH^3X=0$; поэтому $CH^3X=\mathbb{Z}\cdot h^3$, откуда $CH^3U=0$. Если же форма φ' изотропна, то ввиду 1.3 доказываемое утверждение сводится к лемме 5.3. Лемма доказана.

Пусть Y - произвольное многообразие над полем F, $\theta\in Y$ - общая точка. Для каждой точки $y\in Y$ через i_y обозначим естественный морфизм $U_{F(y)}\to U\times Y$.

Л е м м а 6.2. *Имеет место точная последовательность*

$$CH^4Y \xrightarrow{\pi^*} CH^4(U\times Y) \xrightarrow{i_\theta^*} CH^4(U_{F(\theta)}) \longrightarrow 0,$$

где $\pi\colon U\times Y\longrightarrow Y$ - проекция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим спектральную последовательность K-когомологий 3.1, связанную с морфизмом проекции $\pi\colon U\times Y\to Y$:

$$E_1^{p,q}(4) = \coprod_{y\in Y^p} H^q(U_{F(y)},\ K_{4-p}) \Longrightarrow H^{p+q}(U\times Y,\ K_4).$$

По лемме 6.1 имеем $E_1^{4-q,q}=\coprod_{y\in Y^{4-q}}CH^q_{F(y)}=0$ при $q=1,2,3$, т.е. все группы $E_1^{p,q}$ на диагонали $p+q=4$, кроме $E_1^{0,4}$ и $E_1^{4,0}$, равны нулю. Следовательно, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} E_1^{4,0} & \longrightarrow & CH^4(U\times Y) & \longrightarrow & E_1^{0,4} & \longrightarrow & 0. \\ \| & & & & \| & & \\ \coprod_{y\in Y^4} CH^0(U_{F(y)}) & & & & CH^4(U_{F(\theta)}) & & \end{array}$$

Осталось заметить, что образ первого гомоморфизма этой последовательности совпадает с образом гомоморфизма $\pi^*\colon CH^4Y \longrightarrow CH^4(U\times Y)$.

Л е м м а 6.3. *Пусть $\xi\in CH^4(U\times Y)$ и $y\in Y$ - произвольная точка. Если $i_y^*(\xi)\neq0\in$ $\in CH^4(U_{F(y)})$, то и $i_\theta^*(\xi)\neq0\in CH^4(U_{F(\theta)})$. Иначе говоря, существует гомоморфизм $CH^4U_{F(\theta)}\longrightarrow CH^4(U_{F(y)})$, замыкающий коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} CH^4(U_{F(\theta)}) \arrow[dr, dotted] & CH^4(U\times Y) \arrow[l, "i_\theta^*"'] \arrow[d, "i_y"] \\ & CH^4(U_{F(y)}) \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $i_\theta^*(\xi)=0$. Тогда по лемме 6.3 $\xi=\pi^*(\xi')$ для некоторого $\xi'\in CH^4Y$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U\times Y & \xleftarrow{i_y} & U_{F(y)} \\ \downarrow\pi & & \downarrow\alpha \\ Y & \xleftarrow{\beta} & \mathrm{Spec}\ F(y) \end{array}$$

получаем $i_y^*(\xi)=i_y^*\circ\pi^*(\xi')=\alpha^*\circ\beta^*(\xi')=0$, так как $CH^4(\mathrm{Spec}\ F(y))=0$.

Положим $a_3=a_1a_2$, $b_3=b_1b_2$, и пусть Y - гиперповерхность в $\mathbb{A}^7_F$, определенная уравнением $\prod_{i=1}^{3}(a_1x_i^2+b_1y_i^2)=t^2$ (x_i, y_i, t - координаты в $\mathbb{A}^7$). Для произвольного множества A обозначим через F_A композит полей функций $F(Y^{(\alpha)})$, где $Y^{(\alpha)}=Y$ для всех $\alpha\in A$.

Лемма 6.4. *Любая анизотропная квадратичная форма над полем F остается анизотропной и над полем F_A.*

Доказательство. Достаточно доказать, что расширение $F(Y)/F$ не расщепляет анизотропных квадратичных форм. Это получается из следствия 4.8, поскольку многообразие Y содержит неособую рациональную точку $x_i=1$, $y_i=0$ ($i=1,2,3$), $t=a_3$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 6.5. *Пусть F - поле, содержащее $\sqrt{-1}$; элементы $a_1, a_2, b_1, b_2\in F^*$ таковы, что форма $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2\rangle\rangle$ анизотропна; A - произвольное множество (возможно, бесконечное). Пусть Q - проективная квадрика над полем $F_A\supset F$, соответствующая форме $\langle 1, a_1, a_2, a_1a_2, b_1, b_2, b_1b_2\rangle$. Тогда группа TCH^4Q содержит по крайней мере* card A различных элементов.

Замечание 6.6. Взяв бесконечное множество A, получаем 5-мерную квадрику Q с бесконечной группой $TCH^4Q=TCH_1Q$. Более общо, для любого $p\geq 4$ ($q\geq 1$) можно построить квадрику с бесконечной группой TCH^p(TCH_q), взяв, скажем, форму, задающую Q, и добавив к ней $p-4$ гиперболических плоскостей ($q-1$ гиперболических плоскостей). Отметим, что, согласно § 1, группы TCH^p при $p\leq 3$ и группа TCH_0 являются конечными для любой квадрики.

Доказательству теоремы предпошлем некоторые предварительные построения. Пусть, как и раньше, U - аффинная квадрика

$$1 + a_1U_1^2 + a_2U_2^2 + a_3U_3^2 + b_1V_1^2 + b_2V_2^2 + b_3V_3^2 = 0$$

над полем F (напомним, что $a_3=a_1a_2$, $b_3=b_1b_2$). Предположим, что даны некоторое расширение E/F и элементы $x_i, y_i \in E^*$ ($i=1,2,3$), причем $\prod_{i=1}^{3}(a_ix_i^2+b_iy_i^2)=t^2$ при некотором $t\in E^*$. Через e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 обозначаем стандартный базис пространства квадратичной формы φ_E, где $\varphi=\langle 1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\rangle$ – квадратичная форма над F. Определитель 4-мерной подформы, порожденной векторами $e, x_if_i+y_ig_i$ ($i=1,2,3$), равен t^2. Следовательно, эта подформа определяет на проективном замыкании квадрики U_E простой цикл „двойная прямая" (см. 1.8), ограничение которого на U_E мы обозначаем через C. Кривая C задается системой уравнений

$$\begin{cases} B_1=B_2=B_3=0, \\ 1+(a_1x_1^2 + b_1y_1^2)A_1^2=0, \\ tA_3=(a_1x_1^2 + b_1y_1^2)(a_2x_2^2 + b_2y_2^2)A_1A_2, \end{cases}$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ – координаты в ортогональном базисе $x_if_i+y_ig_i$, $b_iy_if_i-a_ix_ig_i$ ($i=1,2,3$). Переходя к координатам U_i, V_i, как несложно проверить, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_iU_i-x_iV_i=0 \quad (i=1,2,3), \\ a_1x_1^2 + b_1y_1^2 + (a_1x_1U_1+b_1y_1V_1)^2 = 0, \\ t(a_3x_3U_3+ b_3y_3V_3)=(a_3x_3^2 + b_3y_3^2)(a_1x_1U_1+ b_1y_1V_1)(a_2x_2U_2+ b_2y_2V_2). \end{cases}$$

Пусть теперь $E=F(Y)$. Выписанная система уравнений определяет замкнутое подмногообразие в $U\times_F Y$, которое мы обозначим через Z. По определению обратный образ Z при морфизме $U_E \longrightarrow U\times_F Y$ совпадает с кривой $C\subset U_E$, построенной выше. Для каждой точки $y\in Y$ через i_y обозначаем, как и раньше, естественный морфизм $U_{F(y)}\to U\times_F Y$; пусть Z_y – цикл $i_y^*(Z)$ на $U_{F(y)}$. Как мы уже знаем, $Z_\theta=C$ для общей точки $\theta\in Y$. Рассмотрим две замкнутые точки u и v на Y, определенные соответственно уравнениями $x_i=1$, $y_i=0$, $t=a_3$ и $x_i=0$, $y_i=1$, $t=b_3$. Вычислим цикл Z_u на U. Очевидно, он задается уравнениями

$$\begin{cases} V_1=V_2=V_3=0, \\ 1 + a_1U_1^2 = 0, \\ U_3=U_1U_2, \end{cases}$$

т.е. является ограничением на U цикла „двойная прямая", связанного с подформой $\langle 1, a_1, a_2, a_3\rangle$ в φ. Аналогично цикл Z_v является ограничением „двойной прямой", связанной с подформой $\langle 1, b_1, b_2, b_3\rangle$ в φ.

Рассмотрим теперь многообразие $U\times Y_1\times Y_2$, где $Y_1=Y_2=Y$, и две его проекции π_1 и π_2 на $U\times Y$. Рассмотрим цикл $\Lambda=\pi_1^*(Z)-\pi_2^*(Z)$ на этом многообразии. Пусть $\eta\in Y_1\times Y_2$ – общая точка. Вычислим цикл Λ_η на $U_{F(\eta)}$. Пусть $\theta_j\in Y_j$ – общая точка и C_j – цикл на $U_{F(\theta_j)}$, описанный выше (обозначавшийся ранее через C). Ясно, что $F(\eta)=F(\theta_1)\cdot F(\theta_2)$.

Так как композиция $U_{F(\eta)}\longrightarrow U\times_F Y_1\times_F Y_2\xrightarrow{\pi_j} U\times_F Y_j$ совпадает с $U_{F(\eta)}\longrightarrow U_{F(\theta_j)}\longrightarrow$ $\longrightarrow U\times_F Y_j$, то

$$\pi_1^*(Z)_\eta = Z_{\theta_1}\otimes_{F(\theta_1)}F(\eta) = C_1\otimes_{F(\theta_1)}F(\eta)$$

и аналогично $\pi_2^*(Z)_\eta = C_2\otimes_{F(\theta_2)}F(\eta)$, следовательно,

$$\Lambda_\eta = \pi_1^*(Z)_\eta - \pi_2^*(Z)_\eta = C_1\otimes_{F(\theta_1)}F(\eta) - C_2\otimes_{F(\theta_2)}F(\eta).$$

Пусть теперь $w=(u,v)\in Y_1\times Y_2$; вычислим Λ_w. Так как композиция $U\xrightarrow{i_w}U\times_F Y_1\times_F Y_2\longrightarrow$ $\longrightarrow U\times_F Y_1$ совпадает с i_u, то $\pi_1^*(Z)_w=i_u^*(Z)=Z_u$. Аналогично $\pi_2^*(Z)_w=Z_v$. Поэтому $\Lambda_w=\pi_1^*(Z)_w-\pi_2^*(Z)_w=Z_u-Z_v$.

П р е д л о ж е н и е 6.7. *Циклы $C_1\otimes F(\eta)$ и $C_2\otimes F(\eta)$ на $U_{F(\eta)}$ неэквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X и X' - проективные квадрики над полем F, соответствующая формам φ и φ'. Имеем точную последовательность $CH^3X'\longrightarrow CH^4X\longrightarrow$ $\longrightarrow CH^4U\longrightarrow 0$. По условию форма $\langle\langle a_1,a_2,b_1,b_2\rangle\rangle$ анизотропна, поэтому „двойные прямые" на X, соответствующие подформам $<1,a_1,a_2,a_3>$ и $<1,b_1,b_2,b_3>$ формы φ, неэквивалентны. Форма φ' анизотропна и имеет определитель, равный 1, следовательно, не может содержать 4-мерной подформы определителя 1, откуда в силу 1.9 группа CH^3X', а следовательно, и ее образ в CH^4X не содержат кручения. Поэтому ограничения этих „двойных прямых" на U - циклы Z_u и Z_v - также неэквивалентны, т.е. $[\Lambda_w]\neq 0\in CH^4U$. Отсюда, согласно лемме 6.3, $[\Lambda_\eta]\neq 0\in CH^4(U_{F(\eta)})$, т.е. циклы $C_1\otimes_F F(\eta)$ и $C_2\otimes_F F(\eta)$ неэквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6.5. Пусть $e,f_1,f_2,f_3,g_1,g_2,g_3$ - стандартный базис пространства квадратичной формы $<1,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3>$ над полем F_A. Поле F_A содержит для каждого $\alpha\in A$ поле функций $F(Y^{(\alpha)})$ и вместе с ним элементы $x_i^{(\alpha)}$, $y_i^{(\alpha)}$ $(i=1,2,3)$, $t^{(\alpha)}$, причем $\prod_{i=1}^{3}(a_i x_i^{(\alpha)2}+b_i y_i^{(\alpha)2})=t^{(\alpha)2}$. Определитель 4-мерной подформы $\psi^{(\alpha)}$, порожденной векторами e, $e_i^{(\alpha)}=x_i^{(\alpha)}f_i+y_i^{(\alpha)}g_i$ $(i=1,2,3)$, равен t^2. Следовательно, эта подформа определяет некоторый элемент кручения $\xi^{(\alpha)}\in TCH^4Q$ (см. 1.8). Мы докажем, что все элементы $\xi^{(\alpha)}$ $(\alpha\in A)$ различны.

Фиксируем $\alpha,\beta\in A$, $\alpha\neq\beta$, и докажем, что $\xi^{(\alpha)}\neq\xi^{(\beta)}$.

Идея доказательства состоит в проведении такой „специализации" переменных x,y, чтобы векторы e, $e_1^{(\alpha)}$, $e_2^{(\alpha)}$, $e_3^{(\alpha)}$, $e_1^{(\beta)}$, $e_2^{(\beta)}$, $e_3^{(\beta)}$ стали попарно ортогональными. Тогда циклы $\xi^{(\alpha)}$ и $\xi^{(\beta)}$ можно будет сравнить с помощью теоремы 5.1. Подберем такую „специализацию". Нужно добиться, чтобы $(e_i^{(\alpha)},\ e_i^{(\beta)})=0$ при $i=1,2,3$ (остальные пары ортогональны с самого начала). Поскольку

$$(e_i^{(\alpha)},\ e_i^{(\beta)}) = a_i x_i^{(\alpha)}x_i^{(\beta)} + b_i y_i^{(\alpha)}y_i^{(\beta)},$$

подходящей „специализацией" будет $x_i^{(\beta)}=y_i^{(\alpha)}=0$, $x_i^{(\alpha)}=y_i^{(\beta)}=1$. При этом получим $\psi^{(\alpha)}=\langle\langle a_1,a_2\rangle\rangle$, $\psi^{(\beta)}=\langle\langle b_1,b_2\rangle\rangle$, и условие $\xi^{(\alpha)}\neq\xi^{(\beta)}$ станет эквивалентно условию анизотропности формы $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2\rangle\rangle$ в силу теоремы 5.1.

Оформим строго изложенную идею доказательства. Заменив F на $F_{A\setminus\{\alpha,\beta\}}$, сведем доказательство к случаю $A=\{\alpha,\beta\}$ (форма $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2\rangle\rangle$ остается анизотропной в силу леммы 6.4). В обозначениях предложения 6.7 пусть $Y_1=Y^{(\alpha)}$, $Y_2=Y^{(\beta)}$. Тогда $F_A=F(\eta)$, где $\eta\in Y_1\times_F Y_2$ - общая точка, и

$$(\xi^{(\alpha)} - \xi^{(\beta)})\Big|_{U_{F(\eta)}} = [C_1\otimes F(\eta)] - [C_2\otimes F(\eta)] \neq 0 \in \mathrm{CH}^4(U_{F(\eta)}).$$

Следовательно, $\xi^{(\alpha)}\neq\xi^{(\beta)}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

[2] Quillen D. Higher K-theory. I // Lect. Notes. Math. 1973. Vol.341. P.77-139.

[3] Серр Ж.-П. Локальная алгебра и теория кратностей // Математика. 1963. Т.7, N 5. С.3-93.

[4] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.

[5] Swan R.G. K-theory of quadric hypersurfaces // Ann. Math. 1985. Vol.122, N I. P.113-154.

[6] Карпенко Н.А. Алгебро-геометрические инварианты квадратичных форм // Алгебра и анализ. 1990. Т.2, вып.1. С. 141-162.

[7] Lam T.Y. The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, Reading, Mas. 1973.

[8] Kato K. Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles // Contemp. Math. 1986. Vol.55, N 1. P.241-254.

[9] Bass H., Tate J. The Milnor ring of a global field // Lect. Notes Math. 1973. Vol.342. P.349-446.

[10] Milnor J. Algebraic K-theory and quadratic forms // Invent. Math. 1970. Vol.9, N 4. P.318-344.

[11] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: Изд-во иностр.лит. 1960.

[12] Merkurjev A.S., Suslin A.A. On the norm residuc homomorphism of degree three. LOMI Preprints. 1986. E-9-86.

[13] Arason J.K. Cohomologische Invarianten Quadratischer Formen // J. Algebra. 1975. Vol.36. P.448-491.

Ленинградский
государственный университет
199034, Ленинград,
Университетская наб., 7/9

Поступило 14 июня 1989 г.