КОГОМОЛОГИИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КЛЕТОЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИЗОТРОПНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФЛАГОВ.

НИКИТА А. КАРПЕНКО

Abstract. Пусть A — сепарабельная алгебра (с инволюцией). В работе рассматриваются многообразия флагов (изотропных) идеалов алгебры A и строятся некоторые разложения этих многообразий в категории Чжоу-соответствий. В качестве следствия получаются разложения в различных теориях когомологий.

Содержание

Contents

Date: март 1999.

0.

Введение

Пусть ϕ — квадратичная форма над некоторым полем и пусть ψ — ее анизотропная часть (т.е. анизотропная квадратичная форма с тем же самым классом в кольце Витта, что и ψ). Пожалуй, М. Рост был первым, кто подметил, что хотя взаимосвязь между самими проективными квадриками X_ϕ и X_ψ, определенными формами ϕ и ψ, представляется довольно туманной, взаимосвязь между их мотивами вполне ясна (см. [16]). Так как мотивы обладают свойством универсальности, наличие этой взаимосвязи позволяет вычислять разнообразные когомологические инварианты квадрики X_ϕ в терминах когомологических инвариантов квадрики X_ψ.

Похожие результаты для многообразий Севери-Брауэра получены в [10]: мотив многообразия Севери-Брауэра X_A, заданного центральной простой алгеброй A, выражен там через мотив многообразия X_D, где D — соответствующая A алгебра с делением (т.е. центральная алгебра с делением с тем же, что и A, классом в группе Брауэра).

Два описанных результата являются частными решениями следующей общей проблемы. Пусть G — линейная алгебраическая группа (над произвольным полем) и пусть X — некоторое проективное G-однородное многообразие. Хотелось бы уметь вычислять мотив многообразия X в терминах мотивов G_{an}-однородных многообразий, где G_{an} — полупростое анизотропное ядро группы G.

В расщепленной ситуации такое вычисление проделано в [12]. Оно использует наличие на X клеточной структуры. Для работы с общим случаем требуется относительный аналог этого понятия. В настоящей работе мы вводим понятие относительного клеточного пространства X (6.1). Затем мы выражаем мотив X через мотивы баз его клеток (6.5). Точнее говоря, речь о соотношении, имеющем место уже на уровне категории соответствий (в то время под категорией мотивов обычно понимается псевдо-абелево пополнение категории соответствий). По этой причине мы вообще не работаем с категорией мотивов.

Мы применяем теорему об относительных клеточных пространствах к случаю многообразия (изотропных) флагов X заданному некоторой сепарабельной алгеброй (с инволюцией) A и вычисляем мотив X в терминах мотивов флаговых многообразий, заданных анизотропным ядром (10.12, 14.5) алгебры A. Другими словами, мы решаем сформулированную выше общую проблему для линейных алгебраических групп G классического типа.

Первая часть работы начинается с подробного и независимого рассказа о категории соответствий. Хотя нечто подобное уже имеется в литературе (см., например, [13]), для такого начала есть по крайней мере одна причина: нам нужен полный список свойств произвольной теории когомологий H, который бы гарантировал, что H задает функтор на категории соответствий (и, тем самым, вычисление мотива какого-либо многообразия X дает вычисление $\mathrm{H}(X)$). Такой список предложен в §2. Мы не находим подобного списка в литературе.

Вторая часть работы содержит конструкцию многообразий флагов, основанную на языке функторов точек, разработанном в [5]. Хотя для расщепленного случая такая конструкция представлена в литературе (см. [5, chap. I] или [8, §§9.7, 9.8] относительно конструкций многообразий (флагов) подпространств), мы не находим ссылки даже для наиболее простого из нерасщепленных случаев — для многообразий Севери-Брауэра. Действительно, в литературе можно найти либо набросок конструкции многообразия Севери-Брауэра X_A алгебры A (когда, например, описывается лишь множество рациональных точек у X_A, как это сделано в [19, chap. X, §6]), либо конструкцию, в которой X_A задается уравнениями в проективном пространстве, которая сложна, неинвариантна (так как, например, требует выбора базиса A, см. [1, §1.2]) и неудобна в использовании.

Мы полагаем, что единственный естественный и при этом наиболее простой способ строить многообразия флагов и работать с ними — это способ основанный на использовании языка функторов точек. Этот язык уже давно является основным для работы с линейными алгебраическими группами. Уже поэтому естественно ожидать, что он удобен и для однородных многообразий, как объектов, тесно связанных с линейными алгебраическими группами. Хотя, конечно, в силу неаффинности однородных многообразий с ними сложнее иметь дело, чем с аффинными алгебраическими группами.

Необходимые основы языка функторов точек (почти совсем без доказательств) изложены в начале второй части работы.

Part 1.

Часть 1. Когомологии относительных клеточных пространств

Соглашения

Пусть F — некоторое поле. Многообразием над полем F, или F-многообразием мы называем произвольную отделимую F-схему конечного типа (не предполагаемую ни целой, ни даже редуцированной). Таким образом, любая замкнутая подсхема F-многообразия также является F-многообразием. F-многообразие называется геометрически редуцированным (соотв., геометрически неприводимым), если оно редуцировано (соотв., неприводимо) над любым расширением поля F, или, что эквивалентно, над алгебраическим замыканием F. Многообразие называется гладким, если оно “геометрически регулярно”. Многообразие называется полным, если его структурный морфизм является собственным.

1.

Категория соответствий

Фиксируем некоторое поле F и обозначим через $\mathcal{V}$ категорию гладких полных (или проективных) F-многообразий. Категория (Чжоу-)соответствий $\mathcal{CV}$ состоит из тех же объектов, что и $\mathcal{V}$, в то время как множество морфизмов $\mathrm{Hom}(X, Y)$ для двух многообразий X и Y в $\mathcal{CV}$ определено как группа Чжоу $\mathrm{CH}(X \times Y)$ (т.е. группа алгебраических циклов на $X \times Y$ по модулю рациональных эквивалентности, см. [7]). Ниже перечислены свойства группы Чжоу, которые нужны для построения категории соответствий (мы приносим извинения за смешение “данных” с “аксиомами”):

- для любого многообразия $X \in \mathcal{V}$ определена абелева группа $\mathrm{CH}(X)$;
- для любого морфизма многообразий $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, имеются:
  - гомоморфизм обратного образа
  $$f^* \colon \mathrm{CH}(Y) \to \mathrm{CH}(X) \ ,$$
  дающий (контравариантный) функтор $\mathcal{V} \to \mathcal{Ab}$ в категорию абелевых групп;
  - гомоморфизм прямого образа
  $$f_* \colon \mathrm{CH}(X) \to \mathrm{CH}(Y) \ ,$$
  дающий (ковариантный) функтор $\mathcal{V} \to \mathcal{Ab}$;
  - если f — изоморфизм, то изоморфизмы f^* и f_* взаимно-обратны;
- (**“**согласованность с произведениями**”**) для любого морфизма $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ и любого многообразия $Z \in \mathcal{V}$ композиция $pr_Y^* \circ f_*$ совпадает с $(f \times id_Z)_* \circ pr_X^*$; участвующие здесь морфизмы изображены в диаграмме:
$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{f \times id_Z} & Y \times Z \\ {\scriptstyle pr_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle pr_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$
(pr_X и pr_Y — это проекции);
- (**“**согласованность с копроизведениями**”**) для любых $X_i \in \mathcal{V}$, где $i = 1, 2$, абелева группа $\mathrm{CH}(X_1 \coprod X_2)$ является прямой суммой групп $\mathrm{CH}(X_1)$ и $\mathrm{CH}(X_2)$, причем гомоморфизмы вложения и проекции — это гомоморфизмы обратного и прямого образов относительно вложений $X_i \hookrightarrow X_1 \coprod X_2$;
- для любого $X \in \mathcal{V}$ абелева группа $\mathrm{CH}(X)$ снабжена структурой коммутативного кольца с единицей (которую мы будем обозначать 1_X);
- для любого морфизма $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$
  - гомоморфизм обратного образа $f^* \colon \mathrm{CH}(Y) \to \mathrm{CH}(X)$ является гомоморфизмом колец, т.е.
  $$f^*(\beta_1 \cdot \beta_2) = f^*(\beta_1) \cdot f^*(\beta_2)$$
  для $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{CH}(Y)$ и $f^*(1_Y) = 1_X$;
  - (формула проекции) гомоморфизм прямого образа $f_* : \mathrm{CH}(X) \to \mathrm{CH}(Y)$ является гомоморфизмом $\mathrm{CH}(Y)$-модулей, т.е.
  $$f_*\big(f^*(\beta) \cdot \alpha\big) = \beta \cdot f_*(\alpha)$$
  для $\beta \in \mathrm{CH}(Y)$ и для $\alpha \in \mathrm{CH}(X)$.

Группа Чжоу имеет еще и градуировку (коразмерностью циклов), но мы пока ее не рассматриваем. До начала §6 можно воспринимать CH формально: как некую теорию, обладающую перечисленными свойствами.

Элементы множества $\mathrm{Hom}(X, Y)$ называются соответствиями.

Определение **1.1.** Композиция $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(X, Z)$ двух соответствий $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ определена как
$$(pr_{XZ})_*\Big(pr_{YZ}^*(\beta) \cdot pr_{XY}^*(\alpha)\Big) \ ,$$

где точкой обозначено умножение в кольце Чжоу, звездочками — гомоморфизмы обратного и прямого образов, а морфизмы многообразий — это проекции произведения $X \times Y \times Z$, показанные в диаграмме:

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y & X \times Y \times Z \arrow[l, "pr_{XY}"'] \arrow[r, "pr_{YZ}"] \arrow[d, "pr_{XZ}"] & Y \times Z \\
 & X \times Z &
\end{tikzcd}
$$

Определение **1.2.** Класс графика Γ_f морфизма многообразий $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ определим как

$$\Gamma_f = (id_X, f)_*(1_X) \in \mathrm{CH}(X \times Y) ,$$

где $(id_X, f) : X \to X \times Y$ — морфизм в произведение, заданный морфизмами в сомножители id_X и f. Класс диагонали δ_X многообразия $X \in \mathcal{V}$ определим как класс графика Γ_{id_X}.

Предложение **1.3.** Категория соответствий $\mathcal{CV}$ является*:*
1) действительно категорией*; 2)* аддитивной категорией*; 3)* аддитивно самодвойственной.

Доказательство. 1) Для начала проверим, что класс диагонали дает тождественный морфизм. Возьмем произвольное соответствие $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "(id_X, id_X)"'] & X \times Y \arrow[l, "pr_X"'] \arrow[d, "(id_X, id_X)\times id_Y"] & \\
X \times X & X \times X \times Y \arrow[l, "pr_{12}"'] \arrow[r, "pr_{23}"] \arrow[d, "pr_{13}"] & X \times Y \\
 & X \times Y &
\end{tikzcd}
$$

Имеем:

$$\alpha \circ \delta_X = (pr_{13})_* \Big(pr_{23}^*(\alpha) \cdot \ pr_{12}^*(\delta_X) \Big) .$$

Подставляя $(id_X, id_X)_*(1_X)$ вместо δ_X и используя "согласованность с произведениями" по отношению к квадрату, входящему в диаграмму, получаем цепочку равенств

$$\alpha \circ \delta_X = (pr_{13})_* \Big(pr_{23}^*(\alpha) \cdot \big((id_X, id_X) \times id_Y \big)_* \circ pr_X^*(1_X) \Big) =$$
$$= (pr_{13})_* \circ \big((id_X, id_X) \times id_Y \big)_* \Big(\big((id_X, id_X) \times id_Y \big)^* \circ pr_{23}^*(\alpha) \cdot pr_X^*(1_X) \Big) ,$$

последнее из которых использует формулу проекции. Полученное выражение равно α, так как

$$pr_{13} \circ \big((id_X, id_X) \times id_Y \big) = id_{X \times Y} = pr_{23} \circ \big((id_X, id_X) \times id_Y \big) ,$$

а $pr^*(1_X) = 1_{X \times Y}$.

Равенство $\delta_Y \circ \alpha = \alpha$ проверяется аналогично.

Чтобы удостовериться в ассоциативности композиции, возьмем какие-нибудь

$$\alpha \in \mathrm{Hom}(T, X), \ \ \beta \in \mathrm{Hom}(X, Y) \ \text{ и } \ \gamma \in \mathrm{Hom}(Y, Z) .$$

По определению, композиция $\gamma\circ(\beta\circ\alpha)$ вычисляется при помощи следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & T\times Y & & & \\
 & pr^{TXY}_{TY}\nearrow & & & & \nwarrow pr^{TYZ}_{TY} & \\
T\times X\times Y & \xrightarrow{pr^{TXY}_{XY}} & X\times Y & & Y\times Z & \xleftarrow{pr^{TYZ}_{YZ}} & T\times Y\times Z\\
pr^{TXY}_{TX}\downarrow & pr_{TXY}\nwarrow & \uparrow pr_{XY} & & pr_{YZ}\uparrow & \nearrow pr_{TYZ} & \downarrow pr^{TYZ}_{TZ}\\
T\times X & \xleftarrow{pr_{TX}} & & T\times X\times Y\times Z & & \xrightarrow{pr_{TZ}} & T\times Z
\end{array}$$

Имеем:

$$\gamma\circ(\beta\circ\alpha)=(pr^{TYZ}_{TZ})_*$$
$$\left((pr^{TYZ}_{YZ})^*(\gamma)\cdot(pr^{TYZ}_{TY})^*\circ(pr^{TXY}_{TY})_*\Big((pr^{TXY}_{XY})^*(\beta)\cdot(pr^{TXY}_{TX})^*(\alpha)\Big)\right).$$

Используя "согласованность с произведениями" по отношению к ромбу, входящему в диаграмму, заменим композицию $(pr^{TYZ}_{TY})^*\circ(pr^{TXY}_{TY})_*$ на $(pr_{TYZ})_*\circ pr^*_{TXY}$. Формула проекции, примененная после этой замены к морфизму pr_{TYZ}, дает:

$$\gamma\circ(\beta\circ\alpha)=$$
$$=(pr^{TYZ}_{TZ})_*\circ(pr_{TYZ})_*$$
$$\left(pr^*_{TYZ}\circ(pr^{TYZ}_{YZ})^*(\gamma)\cdot pr^*_{TXY}\Big((pr^{TXY}_{XY})^*(\beta)\cdot(pr^{TXY}_{TX})^*(\alpha)\Big)\right)=$$
$$=(pr_{TZ})_*\Big((pr_{YZ})^*(\gamma)\cdot(pr_{XY})^*(\beta)\cdot(pr_{TX})^*(\alpha)\Big).$$

Вычислив подобным образом композицию $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha$, мы получим то же самое выражение.

2) Множество $\operatorname{Hom}(X,Y)=\mathrm{CH}(X\times Y)$ для любых объектов $X,Y\in\mathcal{CV}$ является абелевой группой, причем правило композиции очевидно биаддитивно.

Нулевой объект задан "пустым многообразием" $\emptyset$ (тот факт, что $\mathrm{CH}(\emptyset)=0$, следует из "согласованности с копроизведениями").

Несвязное объединение $X_1\coprod X_2$ многообразий $X_i\in\mathcal{V}$ $(i=1,2)$ является прямой суммой объектов X_1 и X_2 категории $\mathcal{CV}$, при этом морфизмы вложения и проекции задаются классами графиков вложений $X_i\hookrightarrow X_1\coprod X_2$ и транспозициями этих классов (здесь используется "согласованность с копроизведениями"; определение транспозиции дано в следующем абзаце).

3) Для $X, Y \in \mathcal{V}$ обозначим через $t\colon X \times Y \to Y \times X$ морфизм перестановки сомножителей. Так как t — изоморфизм и $t \circ t = id_{X\times Y}$, имеем $t_* = t^*$. Назовем транспозицией соответствия $\alpha \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ и обозначим через α^t соответствие

$$t_*(\alpha) = t^*(\alpha) \in \mathrm{Hom}(Y,X)\ .$$

Тождественный на объектах (контравариантный) функтор $\mathcal{CV} \to \mathcal{CV}$, сопоставляющий каждому соответствию α его транспозицию α^t, является аддитивным и обратным к самому себе. □

Предложение **1.4.** Правила

$$X \in \mathcal{V}\ \mapsto\ X \in \mathcal{CV}\ ,\quad f \in \mathrm{Mor}(X,Y)\ \mapsto\ \Gamma_f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$$

определяют *(*ковариантный*)* функтор $\mathcal{V} \to \mathcal{CV}$.

Доказательство. Для любого $X \in \mathcal{V}$ тождество $\Gamma_{id_X} = \delta_X$ имеет место по определению δ_X (1.2).

Проверим, что $\Gamma_g \circ \Gamma_f = \Gamma_{g\circ f}$ для $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ и $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$. Разложив морфизм $\big(id_X, (g\circ f)\big)$ в композицию

$$X \xrightarrow{(id_X,\, f)} X \times Y \xrightarrow{id_X \times (id_Y,\, g)} X \times (Y \times Z) \xrightarrow{pr_{XZ}} X \times Z\ ,$$

получаем

$$\Gamma_{g\circ f} = (pr_{XZ})_* \circ \big(id_X \times (id_Y, g)\big)_*(\Gamma_f)\ .$$

Чтобы вычислить $\Gamma_g \circ \Gamma_f$, воспользуемся диаграммой

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[r, "pr_Y"] \arrow[d, "id_X \times (id_Y, g)"'] & Y \arrow[d, "(id_Y, g)"] \\ X \times Y & X \times Y \times Z \arrow[l, "pr_{XY}"'] \arrow[r, "pr_{YZ}"] \arrow[d, "pr_{XZ}"'] & Y \times Z \\ & X \times Z & \end{tikzcd}$$

По “согласованности с произведениями” для входящего в диаграмму квадрата мы имеем

$$pr_{YZ}^* \circ (id_Y, g)_* = \big(id_X \times (id_Y, g)\big)_* \circ pr_Y^*\ .$$

Следовательно, $\Gamma_g \circ \Gamma_f$ является прямым образом (относительно pr_{XZ}) следующего произведения:

$$\begin{aligned} &\big(id_X \times (id_Y, g)\big)_* \circ pr_Y^*(1_Y) \cdot pr_{XY}^*(\Gamma_f) = \\ &\qquad = \big(id_X \times (id_Y, g)\big)_* \Big(pr_Y^*(1_Y) \cdot \big(id_X \times (id_Y, g)\big)^* \circ pr_{XY}^*(\Gamma_f)\Big) \end{aligned}$$

(здесь использована формула проекции для морфизма $id_X \times (id_Y, g)$). Так как

$$pr_{XY} \circ \big(id_X \times (id_Y, g)\big) = id_{X\times Y} \quad \text{и} \quad pr_Y^*(1_Y) = 1_{X\times Y}\ ,$$

произведение, заключенное в большие скобки в предпоследней выносной формуле, равно Γ_f. □

2.

Геометрические теории когомологий

Будем говорить, что H — геометрическая теория когомологий, если
- для любого многообразия $X \in \mathcal{V}$ определена абелева группа $\mathrm{H}(X)$;
- для любого морфизма $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ имеется
  - гомоморфизм обратного образа
$$f^* \colon \mathrm{H}(Y) \to \mathrm{H}(X) ,$$
    дающий (контравариантный) функтор $\mathcal{V} \to \mathcal{Ab}$;
  - гомоморфизм прямого образа
$$f_* \colon \mathrm{H}(X) \to \mathrm{H}(Y) ,$$
    дающий (ковариантный) функтор $\mathcal{V} \to \mathcal{Ab}$;
- (**"**согласованность с произведениями**"**) для любого квадрата в $\mathcal{V}$, имеющего вид
$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z & \xrightarrow{pr_{YZ}} & Y \times Z \\ {\scriptstyle pr_{XY}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle pr^{YZ}} \\ X \times Y & \xrightarrow{pr^{XY}} & Y \end{array}$$
  композиции $(pr^{YZ})^* \circ pr^{XY}_*$ и $(pr_{YZ})_* \circ pr^*_{XY}$ равны;
- для любого $X \in \mathcal{V}$ абелева группа $\mathrm{H}(X)$ снабжена структурой (левого) $\mathrm{CH}(X)$-модуля;
- для любого морфизма $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$
  - гомоморфизм обратного образа $f^* \colon \mathrm{H}(Y) \to \mathrm{H}(X)$ является гомоморфизмом $\mathrm{CH}(Y)$-модулей, т.е.
$$f^*(\beta \cdot y) = f^*(\beta) \cdot f^*(y)$$
    для $\beta \in \mathrm{CH}(Y)$ и для $y \in \mathrm{H}(Y)$;
  - (первая формула проекции) гомоморфизм прямого образа $f_* \colon \mathrm{H}(X) \to \mathrm{H}(Y)$ является гомоморфизмом $\mathrm{CH}(Y)$-модулей, т.е.
$$f_*\big(f^*(\beta) \cdot x\big) = \beta \cdot f_*(x)$$
    для $\beta \in \mathrm{CH}(Y)$ и для $x \in \mathrm{H}(X)$.
  - (вторая формула проекции)
$$f_*\big(\alpha \cdot f^*(y)\big) = f_*(\alpha) \cdot y$$
    для $\alpha \in \mathrm{CH}(X)$ и для $y \in \mathrm{H}(Y)$.

Определение **2.1.** Пусть H — некоторая геометрическая теория когомологий. Для произвольного соответствия $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ определим гомоморфизм групп $\mathrm{H}(\alpha) \colon \mathrm{H}(X) \to \mathrm{H}(Y)$ как композицию
$$\mathrm{H}(X) \xrightarrow{pr_X^*} \mathrm{H}(X \times Y) \xrightarrow{\alpha \cdot} \mathrm{H}(X \times Y) \xrightarrow{(pr_Y)_*} \mathrm{H}(Y) ,$$
где средняя средняя стрелка — это умножение на $\alpha \in \mathrm{CH}(X \times Y)$.

Предложение **2.2.** *Для произвольного морфизма многообразий $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ имеют место формулы $\mathrm{H}(\Gamma_f) = f_*$ и $\mathrm{H}(\Gamma^t_f) = f^*$. Для любого $\alpha \in \mathrm{CH}(X)$ гомоморфизм $\mathrm{H}\big((id_X, id_X)_*(\alpha)\big)$ задается умножением на α.*

Доказательство. Чтобы сосчитать $\mathrm{H}(\Gamma_f)$, воспользуемся диаграммой

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "(id_X, f)"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "pr_X"'] \arrow[r, "pr_Y"] & Y \end{tikzcd} .$$

Для $x \in \mathrm{H}(X)$ имеем:

$$\mathrm{H}(\Gamma_f)(x) = (pr_Y)_*\Big((id_X, f)_*(1_X) \cdot pr_X^*(x)\Big) = \\ = (pr_Y)_* \circ (id_X, f)_*\Big(1_X \cdot (id_X, f)^* \circ pr_X^*(x)\Big)$$

(последнее из этих равенств выполнено по второй формуле проекции). Поскольку

$$pr_X \circ (id_X, f) = id_X \quad \text{и} \quad pr_Y \circ (id_X, f) = f \ ,$$

получаем $f_*(x)$.

При вычислении $\mathrm{H}(\Gamma_f^t)$ следует воспользоваться морфизмом (f, id_X) вместо (id_X, f):

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "(f, id_X)"] & \\ Y & Y \times X \arrow[l, "pr_Y"'] \arrow[r, "pr_X"] & X \end{tikzcd} .$$

Для $y \in \mathrm{H}(Y)$ имеем:

$$\mathrm{H}(\Gamma_f^t)(y) = (pr_X)_*\Big((f, id_X)_*(1_X) \cdot pr_Y^*(y)\Big) = \\ = (pr_X)_* \circ (f, id_X)_*\Big(1_X \cdot (f, id_X)^* \circ pr_Y^*(y)\Big) = \\ = (id_X)_*\big(f^*(y)\big) = f^*(y) \ .$$

Для вычисление $\mathrm{H}\left((id_X, id_X)_*(\alpha)\right)$ применяем диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "(id_X, id_X)"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] & X \end{tikzcd} .$$

Для $x \in \mathrm{H}(X)$ имеем:

$$\mathrm{H}\left((id_X, id_X)_*(\alpha)\right)(x) = (pr_2)_*\Big((id_X, id_X)_*(\alpha) \cdot pr_1^*(x)\Big) = \\ = (pr_2)_* \circ (id_X, id_X)_*\Big(\alpha \cdot (id_X, id_X)^* \circ pr_1^*(x)\Big) = \alpha \cdot x \ .$$

$\square$

Предложение **2.3.** Правила

$$X \in \mathcal{CV} \ \mapsto \ \mathrm{H}(X) \in \mathcal{Ab}, \\ \alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y) \ \mapsto \ \mathrm{H}(\alpha) \in \mathrm{Hom}\left(\mathrm{H}(X), \mathrm{H}(Y)\right)$$

задают аддитивный функтор $\mathrm{H}\colon \mathcal{CV} \to \mathcal{Ab}$.

Доказательство. Удостоверимся сперва, что H — функтор. Пусть $X \in \mathcal{V}$ — произвольное многообразие. Формула $\mathrm{H}(\Gamma_f) = f_*$ с $f = id_X$, равно как и формула

$$\mathrm{H}\big((id_X, id_X)_*(\alpha)\big) = \alpha\cdot$$

с $\alpha = 1_X$ показывают, что гомоморфизм $\mathrm{H}(\delta_X)$ является тождественным.

Теперь проверим правило композиции. Для этого фиксируем $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ и $x \in \mathrm{H}(X)$. Воспользуемся такой диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
X \times Y \arrow[ur, "pr_Y^{XY}"] \arrow[d, "pr_X^{XY}"'] & & Y \times Z \arrow[ul, "pr_Y^{YZ}"'] \arrow[d, "pr_Z^{YZ}"] \\
X & X \times Y \times Z \arrow[l, "pr_X"'] \arrow[r, "pr_Z"] \arrow[ul, "pr_{XY}"'] \arrow[ur, "pr_{YZ}"] \arrow[d, "pr_{XZ}"] & Z \\
 & X \times Z \arrow[ul, "pr_X^{XZ}"] \arrow[ur, "pr_Z^{XZ}"'] &
\end{tikzcd}$$

Имеем

$$\mathrm{H}(\beta) \circ \mathrm{H}(\alpha)(x) = (pr_Z^{YZ})_*\Big(\beta \cdot (pr_Y^{YZ})^* \circ (pr_Y^{XY})_*\big(\alpha \cdot (pr_X^{XY})^*(x)\big)\Big)\ .$$

Так как ромб в этой диаграмме имеет тот же вид, что и квадрат в аксиоме “согласованности с произведениями”, композиция $(pr_Y^{YZ})^* \circ (pr_Y^{XY})_*$ может быть заменена на $(pr_{YZ})_* \circ (pr_{XY})^*$. После этой замены используем первую формулу проекции по отношению к морфизму pr_{YZ}. Получим

$$\begin{aligned}
(pr_Z^{YZ})_* \circ (pr_{YZ})_*\Big(\, pr_{YZ}^*(\beta) \cdot pr_{XY}^*\,\big(\alpha \cdot (pr_X^{XY})^*(x)\big)\Big) = \\
= (pr_Z)_*\Big(\, pr_{YZ}^*(\beta) \cdot pr_{XY}^*(\alpha) \cdot pr_X^*(x)\Big)
\end{aligned}$$

(помимо функториальности гомоморфизмов прямого и обратного образов, здесь используется то, что гомоморфизм обратного образа является гомоморфизмом модулей).

С другой стороны

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(\beta\circ\alpha)(x) &= (pr_Z^{XZ})_*\Big((pr_{XZ})_*\big(pr_{YZ}^*(\beta)\cdot pr_{XY}^*(\alpha)\big)\cdot (pr_X^{XZ})^*(x)\Big) = \\ &= (pr_Z^{XZ})_*\circ(pr_{XZ})_*\Big(pr_{YZ}^*(\beta)\cdot pr_{XY}^*(\alpha)\cdot pr_{XZ}^*\circ(pr_X^{XZ})^*(x)\Big) = \\ &= (pr_Z)_*\Big(pr_{YZ}^*(\beta)\cdot pr_{XY}^*(\alpha)\cdot pr_X^*(x)\Big)\end{aligned}$$

(для вывода первого равенства мы используем определение композиции $\beta\circ\alpha$ (1.1), второго — вторую формулу проекции, третьего — функториальность гомоморфизмов прямого и обратного образов). Итоговое выражение совпадает с тем, что было получено выше.

Таким образом, H является функтором.

Так как отображение

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}\big(\mathrm{H}(X),\mathrm{H}(Y)\big)$$

для любых X, $Y\in\mathcal{V}$ является, очевидно, гомоморфизмом групп, функтор H аддитивен. □

Следствие **2.4.** *Для произвольных $X_i\in\mathcal{V}$, $i=1,2$, абелева группа $\mathrm{H}(X_1\coprod X_2)$ является прямой суммой групп $\mathrm{H}(X_1)$ и $\mathrm{H}(X_2)$, причем гомоморфизмы вложений и проекций — это гомоморфизмы прямого и обратного образа относительно вложений $X_i\hookrightarrow X_1\coprod X_2$.* □

3.

Лемма Йонеды или принцип тождества Манина

Для двух объектов $X,Y\in\mathcal{CV}$ можно определить тензорное произведение $X\otimes Y$ как объект в $\mathcal{CV}$, заданный (прямым) произведением многообразий $X\times Y\in\mathcal{V}$. Однако мы предпочитаем не использовать разные обозначения для "одного и того же" и будем поэтому писать $X\times Y$ вместо $X\otimes Y$ не смотря на то, что этот объект не является прямым произведением X и Y в $\mathcal{CV}$.

Определение **3.1.** Пусть $\alpha\in\mathrm{Hom}(X_1,X_2)$ и $\beta\in\mathrm{Hom}(Y_1,Y_2)$. Рассмотрим проекции

$$X_1\times X_2\xleftarrow{pr_X} X_1\times Y_1\times X_2\times Y_2\xrightarrow{pr_Y} Y_1\times Y_2$$

и определим $\alpha\otimes\beta\in\mathrm{Hom}(X_1\times Y_1,X_2\times Y_2)$ по формуле

$$\alpha\otimes\beta = pr_X^*(\alpha)\cdot pr_Y^*(\beta)\ .$$

Рассматривая $\mathrm{CH}(X)$ как модуль над собой (для произвольного $X\in\mathcal{V}$), мы получаем геометрическую теорию когомологий. В частности, гомоморфизм

$$\mathrm{CH}(\alpha)\colon \mathrm{CH}(X)\to\mathrm{CH}(Y)$$

определен для произвольного $\alpha\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ (2.1).

Лемма **3.2.** *Для любых $\alpha\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и $\beta\in\mathrm{Hom}(Y,Z)$ справедливо*

$$\mathrm{CH}(\delta_X\otimes\beta)(\alpha)=\beta\circ\alpha\ .$$

Доказательство. Воспользуемся морфизмами, изображенными в диаграмме

$$
\begin{array}{ccccc}
X \times X & & \xleftarrow{(id_X,\, id_X)} & & X \\
{\scriptstyle pr_{13}}\uparrow & & & & \uparrow{\scriptstyle pr_X} \\
X \times Y \times X \times Z & & \xleftarrow{\ f\ } & & X \times Y \times Z \\
& {\scriptstyle pr_{12}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle pr_{XY}} & \\
& & X \times Y & & \\
& {\scriptstyle pr_{24}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle pr_{YZ}} & \\
& & Y \times Z & & \\
& {\scriptstyle pr_{14}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle pr_{XZ}} & \\
& & X \times Z & &
\end{array}
$$

Отметим, что все три треугольника здесь коммутативны. Морфизм f получен из (id_X, id_X) заменой базы. Имеем:

$$\mathrm{CH}(\delta_X \otimes \beta)(\alpha) = (pr_{14})_* \Big(pr_{13}^*(\delta_X) \cdot pr_{24}^*(\beta) \cdot pr_{12}^*(\alpha) \Big) \; .$$

Подставив $(id_X, id_X)_*(1_X)$ вместо δ_X, заменив возникшую композицию

$$pr_{13}^* \circ (id_X, id_X)_* \quad \text{на} \quad f_* \circ pr_X^*$$

и воспользовавшись формулой проекции относительно f, получаем

$$(pr_{14})_* \circ f_* \Big(pr_X^*(1_X) \cdot f^* \big(pr_{24}^*(\beta) \cdot pr_{12}^*(\alpha) \big) \Big) =$$
$$= (pr_{XZ})_* \Big(pr_{YZ}^*(\beta) \cdot pr_{XY}^*(\alpha) \Big) = \beta \circ \alpha \; .$$

□

Предложение 3.3 (Принцип тождества Манина)**.** *Соответствие*

$$\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$$

является изоморфизмом (в категории $\mathcal{CV}$), если и только если гомоморфизм групп

$$\mathrm{CH}(\delta_T \otimes \alpha)\colon \mathrm{CH}(T \times X) \to \mathrm{CH}(T \times Y)$$

является изоморфизмом для любого многообразия $T \in \mathcal{V}$.

Доказательство. Согласно лемме Йонеды, α — изоморфизм, если и только если

$$\alpha \circ \colon \mathrm{Hom}(T, X) \to \mathrm{Hom}(T, Y)$$

— изоморфизм для любого $T \in \mathcal{CV}$. В нашей ситуации

$$\mathrm{Hom}(T, X) = \mathrm{CH}(T \times X), \; \mathrm{Hom}(T, Y) = \mathrm{CH}(T \times Y)$$

и, согласно лемме, $\alpha \circ = \mathrm{CH}(\delta_T \otimes \alpha)$. □

4.

Градуировки

Теперь подошло время вспомнить, что группа Чжоу $\mathrm{CH}(X)$ любого $X \in \mathcal{V}$ имеет градуировку
$$\mathrm{CH}(X) = \bigoplus_p \mathrm{CH}^p(X) \ ,$$
а именно, — градуировку коразмерностью циклов. Можно рассматривать и градуировку размерностью циклов:
$$\mathrm{CH}(X) = \bigoplus_p \mathrm{CH}_p(X) \ ,$$
которую можно определить правилами
$$\mathrm{CH}_p(X) = \mathrm{CH}^{\dim X - p}(X)$$
для неприводимого многообразия X и
$$\mathrm{CH}_p(X) = \coprod_k \mathrm{CH}_p(X^k) \ ,$$
если $X \in \mathcal{V}$ произвольно, где X^k — компоненты X (мы используем верхние индексы для компонент по той причине, что нижние индексы понадобятся нам для другой цели). Ниже приведены некоторые свойства этих градуировок:

- гомоморфизм обратного образа сохраняет градуировку коразмерностью;
- гомоморфизм прямого образа сохраняет градуировку размерностью;
- для каждого $X \in \mathcal{V}$ структура кольца на $\mathrm{CH}(X)$ согласована с градуировкой по коразмерности.

Наличие градуировки на CH позволяет ввести понятие степени соответствия. Мы введем это понятие лишь для неприводимых многообразий.

Определение **4.1.** Соответствие $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ между неприводимыми многообразиями X и Y называется соответствием степени p (обозначение: $\deg \alpha = p$), если
$$\alpha \in \mathrm{CH}^{\dim X + p}(X \times Y) \ .$$

Предположим, что H — геометрическая теория когомологий и что для каждого $X \in \mathcal{V}$ группа $\mathrm{H}(X)$ снабжена градуировкой
$$\mathrm{H}(X) = \mathrm{H}^*(X) = \bigoplus_p \mathrm{H}^p(X) \ .$$
Договоримся называть эту градуировку градуировкой коразмерностью. Для неприводимого многообразия $X \in \mathcal{V}$ положим
$$\mathrm{H}_p(X) = \mathrm{H}^{\dim X - p}(X) \ ,$$
а для произвольного $X \in \mathcal{V}$ определим
$$\mathrm{H}_p(X) = \coprod_k \mathrm{H}_p(X^k) \ ,$$
где X^k — компоненты многообразия X. Назовем эту, вторичную градуировку градуировкой размерностью.

Будем говорить, что H^* — градуированная геометрическая теория когомологий, если

- гомоморфизмы обратного образа сохраняют градуировку (коразмерностью);
- гомоморфизмы прямого образа сохраняют градуировку размерностью;
- для каждого $X \in \mathcal{V}$ структура $\mathrm{CH}(X)$-модуля на $\mathrm{H}(X)$ согласована с градуировками (коразмерностью).

Лемма **4.2.** *Пусть H^* — градуированная теория когомологий, $X, Y \in \mathcal{V}$ — неприводимые многообразия, и $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ — соответствие степени p. В этих условиях, гомоморфизм $\mathrm{H}(\alpha)\colon \mathrm{H}^*(X) \to \mathrm{H}^*(Y)$ является однородным гомоморфизмом градуированных групп степени p, т.е.*

$$\mathrm{H}(\alpha)\big(\mathrm{H}^q(X)\big) \subset \mathrm{H}^{p+q}(Y) .$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{H}^q(X)$. Так как гомоморфизм обратного образа сохраняет градуировку, имеем:

$$pr_X^*(x) \in \mathrm{H}^q(X \times Y) .$$

Далее, так как $\alpha \in \mathrm{CH}^{\dim X + p}(X \times Y)$ и поскольку умножение согласовано с градуировкой, получаем:

$$\alpha \cdot pr_X^*(x) \in \mathrm{H}^{\dim X + p + q}(X \times Y) .$$

Хотя многообразия X и Y и предполагаются неприводимыми, произведение $X \times Y$ может и не быть таковым. Однако все компоненты этого произведения имеют одну и ту же размерность $\dim X + \dim Y$ ([9, chap. III, prop. 10.1(d)]), откуда

$$\mathrm{H}^{\dim X + p + q}(X \times Y) = \mathrm{H}_{\dim Y - p - q}(X \times Y) .$$

Поскольку гомоморфизм прямого образа сохраняет нижнюю градуировку, получается, что

$$\mathrm{H}(\alpha)(x) = (pr_Y)_*\Big(\alpha \cdot pr_X(x)\Big) \in \mathrm{H}_{\dim Y - p - q}(Y) = \mathrm{H}^{p+q}(Y) .$$

□

Определение **4.3.** Назовем соответствие $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ *однородным*, если для каждой компоненты X^k многообразия X и для каждой компоненты Y^l многообразия Y компонента $\alpha^{kl} \in \mathrm{Hom}(X^k, Y^l)$ соответствия α имеет некоторую степень.

Будем называть соответствие $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ *разделяемым*, если для каждого l компонента $\alpha^{kl} \in \mathrm{Hom}(X^k, Y^l)$ соответствия α отлична от нуля для не более чем одного значения k.

Лемма **4.4.** *Предположим, что соответствие $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ однородно, разделяемо и задает изоморфизм в $\mathcal{CV}$; обозначим через X^k и Y^l компоненты многообразий X и Y, а через $\alpha^{kl} \in \mathrm{Hom}(X^k, Y^l)$ соответствующие компоненты α. Тогда для любой градуированной геометрической теории когомологий H^* и каждого k, возникает изоморфизм градуированных групп*

$$\big(\mathrm{H}(\alpha^{kl})\big)_l \colon \mathrm{H}^*(X^k) \xrightarrow[\sim]{} \coprod_{l\colon \alpha^{kl} \neq 0} \mathrm{H}^*(Y^l)[\deg \alpha^{kl}]$$

где $\mathrm{H}^*(Y^l)[\deg \alpha^{kl}]$ обозначает группу $\mathrm{H}^*(Y^l)$ с градуировкой, сдвинутой на $\deg \alpha^{kl}$.

Доказательство. Так как соответствие α разделяемо, гомоморфизм $\mathrm{H}(\alpha)$ раскладывается в прямую сумму (по k) гомоморфизмов

$$\big(\mathrm{H}(\alpha^{kl})\big)_l \colon \mathrm{H}(X^k) \to \coprod_{l\colon \alpha^{kl}\neq 0} \mathrm{H}(Y^l)\ .$$

Поскольку $\mathrm{H}(\alpha)$ — изоморфизм, каждое слагаемое — тоже изоморфизм. Так как α однородно, утверждение о градуировках следует из (4.2). $\square$

5.

Некоторые примеры градуированных геометрических теорий когомологий

Группы Чжоу с коэффициентами

Обильным источником примеров является теория групп Чжоу с коэффициентами, разработанная в [17]. Воспользуемся терминологией и обозначениями цитируемой работы. Пусть M — некоторый циклический модуль над F [17, def. (2.1)]. Для любого многообразия $X \in \mathcal{V}$, определена группа Чжоу $A^*(X;M)$ с коэффициентами в M [17, §5], обладающая градуировкой по коразмерности циклов. Положим

$$\mathrm{H}^*(X) = A^*(X;M)\ .$$

Тогда H^* — градуированная геометрическая теория когомологий.

Среди конкретных примеров, возникающих на этом пути, — Квилленовские и Милноровские K-когомологии (по поводу этих примеров см. также [11, §2]). Мы отсылаем читателя к [17] по поводу других примеров циклических модулей.

Отметим, что если циклический модуль M является $\mathbb{Z}$-градуированным, то (см. [17, §5])

$$A^*(X;M) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} A^*(X;M,n)$$

и каждая "n-диагональ" $A^*(X;M,*{+}n)$ в отдельности тоже дает градуированную геометрическую теорию когомологий.

Высшие группы Чжоу

Так как свойства высших групп Чжоу $\mathrm{CH}^*(X,n)$ установлены в работе [3] лишь для квази-проективных многообразий X, в этом примере следует понимать под $\mathcal{V}$ категорию гладких проективных F-многообразий. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}$ и положим

$$\mathrm{H}^*(X) = \mathrm{CH}^*(X,n)\ .$$

Тогда H^* — градуированная геометрическая теория когомологий.

Присоединенные K-группы

Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим n-ную Квилленовскую K-группу $K'_n(X)$ многообразия $X \in \mathcal{V}$ вместе с фильтрацией по коразмерности носителя [15, §7]. Пусть $\mathrm{H}^*(X)$ — присоединенная градуированная группа. Тогда H^* — градуированная геометрическая теория когомологий.

Этальные когомологии

Фиксируем $n, l \in \mathbb{Z}$. Для произвольного $p \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathrm{H}^p(X)$ группу этальных когомологий $H^{n+2p}(X, \mu_l^{\otimes p})$ [14], где μ_l — пучок l-тых корней из единицы. Тогда H^* — градуированная геометрическая теория когомологий.

6.

Относительные клеточные пространства

Определение **6.1.** Многообразие $X \in \mathcal{V}$, снабженное следующими дополнительными данными:

- конечной возрастающей фильтрацией замкнутыми (не обязательно гладкими) подмногообразиями
$$\emptyset = X_{(-1)} \subset X_{(0)} \subset \cdots \subset X_{(n)} = X$$
- и для каждой последовательной разности $X_{(i \setminus i-1)} = X_{(i)} \setminus X_{(i-1)}$ — морфизмом векторного расслоения
$$p_i \colon X_{(i \setminus i-1)} \to Y_i$$
над некоторым многообразием $Y_i \in \mathcal{V}$,

будем называть *(*относительным*)* клеточным пространством. Многообразия Y_i будем называть базами клеток, а их несвязное объединение
$$Y = \coprod_{i=0}^{n} Y_i$$
— *(*тотальной*)* базой пространства X.

Замечание **6.2.** Можно дать и такое (эквивалентное и более короткое) определение: многообразие $X \in \mathcal{V}$ с фильтрацией называется клеточным пространством над Y, если "присоединенное" многообразие
$$\mathrm{Gr}\, X = \coprod_{i=0}^{n} X_{(i \setminus i-1)}$$
является векторным расслоением над Y. Отметим наличие морфизма $\mathrm{Gr}\, X \to X$, заданного (локально-замкнутыми) вложениями $X_{(i \setminus i-1)} \hookrightarrow X$.

Замечание **6.3.** Хотя в определении клеточного пространства и не требуется, чтобы многообразия $X_{(i)}$ были редуцированными, многообразие $\mathrm{Gr}\, X$, будучи векторным расслоением над некоторым многообразием из $\mathcal{V}$, является геометрически редуцированным (и даже гладким). Так что при желании можно ввести редуцированную структуру многообразия на каждом из замкнутых подмножеств $X_{(i)} \subset X$; так как эта процедура не повлияет на присоединенное многообразие, X по-прежнему будет клеточным пространством над той же базой.

Замечание **6.4.** До сих пор мы могли заменить группу Чжоу любой другой теорией, обладающей свойствами группы Чжоу, перечисленными в самом начале работы. Теперь мы намерены воспользоваться спецификой группы Чжоу в большей мере; в частности, доказывая сформулированную ниже теорему, мы будем работать с группами Чжоу неполных и негладких многообразий.

В обозначениях данного выше определения, график векторного расслоения

$$p = \coprod_{i=0}^{n} p_i \colon \operatorname{Gr} X \to Y$$

является подмножеством в $(\operatorname{Gr} X) \times Y$. Возьмем замыкание этого графика в $X \times Y$ и обозначим через π его класс в группе Чжоу $\mathrm{CH}(X \times Y)$ (класс в группе Чжоу определен для произвольного замкнутого подмножества как сумма классов его неприводимых компонент; альтернативный способ состоит во введении редуцированной структуры многообразия на данном замкнутом подмножестве с последующим применением понятия класса подмногообразия, определенного в [7, §1.5]; отметим, что в рассматриваемом случае неприводимые компоненты не имеют попарных пересечений, т.е. совпадают с компонентами связности).

Теорема **6.5.** *Пусть X — клеточное пространство с тотальной базой Y. Только что определенное соответствие $\pi \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ является*

1. *изоморфизмом;*
2. *однородным и разделяемым (4.3).*

Доказательство. 1. Вместо того, чтобы работать с π, мы намерены удостовериться в том, что π^t — изоморфизм (конечно же, тогда и π будет изоморфизмом). Для этого достаточно проверить, что гомоморфизм групп

$$\mathrm{CH}(\delta_T \otimes \pi^t) \colon \mathrm{CH}(T \times Y) \to \mathrm{CH}(T \times X)$$

является изоморфизмом для любого многообразия $T \in \mathcal{V}$ (3.3). Многообразие $T \times X$ имеет клеточную структуру, индуцированную клеточной структурой на X, а именно, фильтрация определена как $(T \times X)_{(i)} = T \times X_{(i)}$, а базы клеток — это $T \times Y_i$. Более того, соответствие в $\operatorname{Hom}(T \times Y, T \times X)$, которое строится по этой клеточной структуре совпадает с $\delta_T \otimes \pi^t$. Таким образом, достаточно лишь проверить, что

$$\mathrm{CH}(\pi^t) \colon \mathrm{CH}(Y) \to \mathrm{CH}(X)$$

— изоморфизм.

Зафиксируем произвольный индекс i между 0 и n и рассмотрим точную последовательность групп Чжоу [7, prop. 1.8]

$$\mathrm{CH}(X_{(i-1)}) \to \mathrm{CH}(X_{(i)}) \to \mathrm{CH}(U_i) \to 0\ ,$$

первая стрелка которой — это гомоморфизм прямого образа относительно замкнутого вложения $X_{(i-1)} \hookrightarrow X_{(i)}$, а вторая — гомоморфизм обратного образа относительно открытого вложения $U_i = X_{(i \setminus i-1)} \hookrightarrow X_{(i)}$. Так как $p_i : U_i \to Y_i$ — векторное расслоение, $p_i^* : \mathrm{CH}(Y_i) \to \mathrm{CH}(U_i)$ — изоморфизм [7, thm. 3.3], так что возникает точная последовательность

$$\mathrm{CH}(X_{(i-1)}) \to \mathrm{CH}(X_{(i)}) \to \mathrm{CH}(Y_i) \to 0\ .$$

Мы намерены реализовать следующую программу:

a): построить расщепление эпиморфизма этой последовательности;
b): показать, что левая стрелка — инъекция;
c): показать, что итоговый (получаемый индукцией по i) изоморфизм

$$\mathrm{CH}(Y) = \coprod_i \mathrm{CH}(Y_i) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{CH}(X)$$

совпадает с $\mathrm{CH}(\pi^t)$.

а) Обозначим через $V_i \subset Y_i \times U_i$ "транспозицию" графика морфизма $p_i\colon U_i \to Y_i$; через Z_i — ее замыкание в $Y_i \times X_{(i)}$ и через

$$Y_i \xleftarrow{pr_{Y_i}} Z_i \xrightarrow{pr_{X_{(i)}}} X_{(i)}$$

— проекции. В нижеследующей лемме множество Z_i рассматривается как редуцированное многообразие.

Лемма **6.6.** Квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}(X_{(i)}) \arrow[r, "in_{U_i}^*"] & \mathrm{CH}(U_i) \\
\mathrm{CH}(Z_i) \arrow[u, "(pr_{X_{(i)}})_*"] & \mathrm{CH}(Y_i) \arrow[l, "pr_{Y_i}^*"'] \arrow[u, "p_i^*"']
\end{tikzcd}$$

коммутативен.

Доказательство. Прежде всего отметим, что гомоморфизм $pr_{Y_i}^*$ определен, поскольку многообразие Y_i гладкое (многообразие Z_i может и не быть таковым) [7, §8.1], в то время как $in_{U_i}^*$ определен, поскольку морфизм in_{U_i} плоский (многообразие $X_{(i)}$ гладким не предполагается) [7, thm. 1.7].

Рассмотрим такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X_{(i)} & U_i \arrow[l, hook', "in_{U_i}"'] & \\
Z_i \arrow[u, "pr_{X_{(i)}}"] \arrow[dr, "pr_{Y_i}"'] & V_i \arrow[l, hook', "in_{V_i}"'] \arrow[u, "pr_{U_i}"] \arrow[d, "pr^{V_i}"] & U_i \arrow[l, "(p_i, id_{U_i})"'] \arrow[ul, "id_{U_i}"'] \arrow[dl, "p_i"] \\
& Y_i &
\end{tikzcd}$$

Поскольку V_i замкнуто в $Y_i \times U_i$ (будучи графиком морфизма многообразий), мы имеем:

$$V_i = Z_i \cap (Y_i \times U_i)$$

(прежде всего, эта формула имеет место на уровне множеств; а так как в ней задействованы лишь редуцированные многообразия, (Z_i редуцировано по построению, Y_i лежит в $\mathcal{V}$, U_i — векторное расслоение над Y_i, V_i изоморфно U_i), эта же формула имеет место и на уровне многообразий, когда под $\cap$ подразумевается расслоенное произведение вложений). По этой причине, квадрат, входящий в состав диаграммы, декартов, откуда [7, prop. 1.7], учитывая, что морфизм in_{U_i} плоский (ведь это открытое вложение), а $pr_{X_{(i)}}$ — собственный, получаем:

$$in_{U_i}^* \circ (pr_{X_{(i)}})_* = (pr_{U_i})_* \circ in_{V_i}^* \ .$$

Раз так, то для любого $\alpha \in \mathrm{CH}(Y_i)$ мы имеем:

$$\begin{aligned}
in_{U_i}^* \circ (pr_{X_{(i)}})_* \circ pr_{Y_i}^*(\alpha) &= (pr_{U_i})_* \circ in_{V_i}^* \circ pr_{Y_i}^*(\alpha) = \\
= (pr_{U_i})_* \circ (pr^{V_i})^*(\alpha) &= (pr_{U_i})_* \circ (p_i, id_{U_i})_* \circ (p_i, id_{U_i})^* \circ (pr^{V_i})^*(\alpha) = \\
&= (id_{U_i})_* \circ p_i^*(\alpha) = p_i^*(\alpha)
\end{aligned}$$

(для третьего равенства существенно, что композиция $(p_i, id_{U_i})_* \circ (p_i, id_{U_i})^*$ — тождественный морфизм, поскольку $(p_i, id_{U_i}) : U_i \to V_i$ — изоморфизм). $\square$

С помощью этой леммы, мы находим расщепление эпиморфизма

$$\mathrm{CH}(X_{(i)}) \twoheadrightarrow \mathrm{CH}(Y_i) ,$$

а именно, — композицию $(pr_{X_{(i)}})_* \circ pr_{Y_i}^*$. Таким образом, мы выполнили пункт **a)** нашего плана.

b) Давайте теперь продлим влево ту стандартную точную последовательность групп Чжоу, что использовалась выше, введя в действие для этой цели группы K-когомологий [17]:

$$H^*(X_{(i)}, K_{*+1}) \to H^*(U_i, K_{*+1}) \to \mathrm{CH}(X_{(i-1)}) \to \mathrm{CH}(X_{(i)}) \to \mathrm{CH}(U_i) \to 0 ,$$

где для произвольного многообразия T

$$H^*(T, K_{*+1}) = \bigoplus_{l \geq 0} H^l(T, K_{l+1}) .$$

Третья (как раз интересующая нас) стрелка будет инъекцией, если первая окажется сюръекцией. То, что первая стрелка действительно сюръекция, вытекает из следующей леммы:

Лемма **6.7.** *Квадрат*

$$\begin{array}{ccc} H^*(X_{(i)}, K_{*+1}) & \xrightarrow{in_{U_i}^*} & H^*(U_i, K_{*+1}) \\ {\scriptstyle (pr_{X_{(i)}})_*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle p_i^*} \\ H^*(Z_i, K_{*+1}) & \xleftarrow{pr_{Y_i}^*} & H^*(Y_i, K_{*+1}) \end{array}$$

коммутативен, а p_i^* — изоморфизм.

Доказательство. Все происходит точно так же, как и в доказательстве предыдущей леммы. Принципиальное значение имеет при этом то, что и в K-когомологиях мы располагаем конструкцией гомоморфизма обратного образа относительно произвольного морфизма в гладкое многообразие [17, §12]; гомоморфизм p_i^* является изоморфизмом согласно [17, prop. 8.6]. $\square$

c) Исходя из **a)** и **b)**, мы получаем изоморфизм

$$\coprod_i \mathrm{CH}(Y_i) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{CH}(X) ,$$

где при каждом i отображение $\mathrm{CH}(Y_i) \to \mathrm{CH}(X)$ определено как композиция

$$\mathrm{CH}(Y_i) \xrightarrow{pr_{Y_i}^*} \mathrm{CH}(Z_i) \xrightarrow{(pr_{X_{(i)}})_*} \mathrm{CH}(X_{(i)}) \xrightarrow{(in_{X_{(i)}})_*} \mathrm{CH}(X) .$$

Для завершения доказательства первого утверждения теоремы остается показать, что выписанная композиция совпадает с гомоморфизмом $\mathrm{CH}((\pi_i)^t)$, где $\pi_i \in \mathrm{CH}(X \times Y_i)$ — компонента соответствия $\pi \in \mathrm{CH}(X \times Y)$. Поскольку $(\pi_i)^t$ совпадает с классом $[Z_i] \in \mathrm{CH}(Y_i \times X)$ подмногообразия $Z_i \subset Y_i \times X$, достаточно лишь удостовериться в следующем общем факте:

Лемма **6.8.** *Пусть X, $Y \in \mathcal{V}$ и пусть $Z \subset Y \times X$ — некоторое замкнутое подмногообразие (мы не предполагаем, что $Z \in \mathcal{V}$, и мы не предполагаем, что Z неприводимо). Обозначим через*

$$Y \xleftarrow{pr_Y^Z} Z \xrightarrow{pr_X^Z} X$$

проекции. Мы утверждаем, что композиция

$$\mathrm{CH}(Y) \xrightarrow{(pr_Y^Z)^*} \mathrm{CH}(Z) \xrightarrow{(pr_X^Z)_*} \mathrm{CH}(X)$$

совпадает с гомоморфизмом $\mathrm{CH}([Z])$ *(по поводу определения* $[Z]$ *см.* [7, §1.5]*).*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & Y \\ Z \arrow[ur, "pr_Y^Z"] \arrow[r, hook, "in"] \arrow[dr, "pr_X^Z"'] & Y \times X \arrow[u, "pr_Y"'] \arrow[d, "pr_X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

По определению гомоморфизма $\mathrm{CH}([Z])$ (2.1), для произвольного $\alpha \in \mathrm{CH}(Y)$ мы имеем:

$$\mathrm{CH}([Z])(\alpha) = (pr_X)_* \Big([Z] \cdot pr_Y^*(\alpha) \Big) \ .$$

Так как умножение на $[Z]$ в группе $\mathrm{CH}(Y \times X)$ совпадает с композицией $in_* \circ in^*$, мы получаем:

$$(pr_X)_* \circ in_* \circ in^* \circ pr_Y^*(\alpha) = (pr_X^Z)_* \circ (pr_Y^Z)^*(\alpha)$$

(равенство имеет место, так как оба треугольника диаграммы коммутативны). □

2. Пусть Y^l — одна из компонент тотальной базы Y клеточного пространства X. Так как морфизм $p\colon \mathrm{Gr}\, X \to Y$ является векторным расслоением, прообраз $T = p^{-1}(Y^l)$ неприводим и по этой причине целиком содержится в некоторой компоненте многообразия X, скажем в компоненте X^k. Ясно, что для любого другого $k' \neq k$ компонента $\pi^{k'l}$ соответствия π равна нулю. Это означает, что соответствие π является разделяемым (4.3).

Более того, π^{kl} есть класс замыкания в $X^k \times Y^l$ графика морфизма $p_{|_T}\colon T \to Y^l$. Так как этот график неприводим (по той причине, что неприводимо T), его замыкание также неприводимо и, таким образом, компонента π^{kl} является классом некоторого простого цикла. Следовательно, соответствие π однородно (4.3). Теорема доказана. □

Замечание **6.9.** Хотя изоморфизмы π и π^t и действуют во взаимно-обратных направлениях, они не являются, вообще говоря, взаимно-обратными.

Замечание **6.10.** В абсолютном случае, т.е. в случае когда $Y_i = \operatorname{Spec} F$ для всех i, доказывать эту теорему значительно проще. К примеру, расщепление для пункта **a)** задается тогда гомоморфизмом обратного образа относительно структурного морфизма $X_{(i)} \to \operatorname{Spec} F$.

Следствие **6.11.** *Обозначим через X^k компоненты клеточного пространства X, через Y^l — компоненты его тотальной базы, а через $\pi^{kl} \in \operatorname{Hom}(X^k, Y^l)$ — компоненты соответствия π. В любой градуированной геометрической теории когомологий H^*, имеется (для каждого k) изоморфизм градуированных групп*

$$\big(\mathrm{H}(\pi^{kl})\big)_l \colon \mathrm{H}^*(X^k) \to \coprod_{l\colon\, \pi^{kl} \neq 0} \mathrm{H}^*(Y^l)[-r_l]\ ,$$

где r_l — ранг векторного расслоения над Y^l, входящего в состав клеточной структуры на X.

Доказательство. Это следует из (4.4), теоремы и того, что $\deg \pi^{kl} = -r_l$. $\square$

7.

Операции над относительными пространствами

Определение **7.1.** Многообразие X, снабженное фильтрацией замкнутыми подмногообразиями и морфизмом $p : \operatorname{Gr} X \to Y$, назовем относительным пространством над Y (таким образом, относительное пространство является клеточным, если и только если $X, Y \in \mathcal{V}$ и морфизм p обладает структурой векторного расслоения).

Определение **7.2** (Произведение)**.** Пусть X и X' — относительные пространства над Y и Y' соответственно (мы используем стандартные обозначения для элементов относительной структуры на X и “штрихованные” обозначения для элементов относительной структуры на X'). На произведении многообразий $X \times X'$ введем такую структуру относительного пространства над $Y \times Y'$: упорядочим множество

$$\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n'\},$$

лексикографическим образом, т.е. скажем, что $(j, j') < (i, i')$, если $j < i$ или если $j = i$ и $j' < i'$; мы полагаем

$$(X \times X')_{(i,i')} = \bigcup_{(j,j') \leq (i,i')} X_{(j)} \times X'_{(j')} = X_{(i-1)} \times X' \cup X_{(i)} \times X'_{(i')} \subset X \times X'\ ;$$

таким образом, $\operatorname{Gr}(X \times X') = \operatorname{Gr} X \times \operatorname{Gr} X'$, и у нас есть морфизм

$$p \times p' \colon \operatorname{Gr}(X \times X') \to Y \times Y'\ .$$

Такое определение распространяется очевидным образом на случай произведения нескольких (в конечном числе) сомножителей. При этом произведение клеточных пространств — тоже клеточное пространство.

Пример **7.3.** Пусть X — относительное пространство над Y и пусть T — некоторое многообразие. Произведение $T \times X$ имеет очевидную структуру относительного пространства над $T \times Y$. Эта структура получается и с помощью (7.2), если рассмотреть T как (тривиальное) относительное пространство над самим собой.

Определение **7.4** (Композиция)**.** Пусть X — относительное пространство над Y и предположим, что Y, в свою очередь, является относительным пространством над Z. Тогда X можно следующим образом превратить в относительное пространство над Z: измельчим фильтрацию на X таким образом, чтобы $\operatorname{Gr}_{\mathrm{new}} X$ для полученной новой фильтрации совпало бы с прообразом $\operatorname{Gr} Y \subset Y$ относительно морфизма $\operatorname{Gr} X \to Y$; в качестве структурного морфизма новой относительной структуры возьмем композицию

$$\operatorname{Gr}_{\mathrm{new}} X \to \operatorname{Gr} Y \to Z\ .$$

Замечание **7.5.** Структуру (7.2) можно также получить посредством (7.3) и (7.4): если X (соотв., X') — относительное пространство над Y (соотв., над Y'), то $X \times X'$ — относительное пространство над произведением $Y \times X'$, которое, в свою очередь, — относительное пространство над $Y \times Y'$; взяв композицию этих двух относительных структур, мы получим относительную структуру на $X \times X'$, совпадающую с (7.2).

Определение **7.6** (Сужение)**.** Пусть X — относительное пространство над Y и пусть $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ — некоторые подмногообразия. Предположим, что сужение морфизма $\operatorname{Gr} X \to Y$ на $X' \cap \operatorname{Gr} X$ является морфизмом в Y'. Тогда многообразие X' вместе с индуцированной фильтрацией $X'_{(i)} = X' \cap X_{(i)}$ является относительным пространством над Y'. Мы будем называть эту относительную структуру на X' структурой, индуцированной с X.

Part 2.

Часть 2. Когомологии изотропных флаговых многообразий

Для работы с многообразиями флагов весьма удобным представляется использование языка функторов точек, разработанного в [5]. В §8 мы напоминаем некоторые основные понятия этого языка и связанные с ними факты, а также фиксируем определенную терминологию. Эта терминология слегка отлична от [5]. К примеру, мы предпочитаем сохранить обычное значение за словом "схема" и не использовать его для функторов. Чтобы избежать того известного препятствия, что F-функторы (определенные ниже) не образуют категории (поскольку морфизмы одного F-функтора в другой не всегда образуют множество), мы будем говорить лишь о категории представимых F-функторов. Менее грубый подход, использующий понятие универзума, изложен в [5].

Все рассматриваемые нами кольца и алгебры ассоциативны и обладают единицей, а гомоморфизмы этих колец или алгебр — отображающими 1 в 1. Если не утверждается противоположное, модуль (или векторное пространство) является правым.

В §8, F — произвольное коммутативное кольцо; начиная с §9, F — поле.

8.

Язык функторов точек

Пусть F — коммутативное кольцо (во всех приложениях F будет полем). Назовем F-функторами ковариантные функторы $F\text{-}\mathfrak{alg} \to \mathfrak{Sets}$ категории коммутативных F-алгебр $F\text{-}\mathfrak{alg}$ в категорию множеств $\mathfrak{Sets}$. Произвольная F-схема (т.е. схема над кольцом F) X задает F-функтор X, а именно

$$R \in F\text{-}\mathfrak{alg} \quad \mapsto \quad X(R) = \mathrm{Mor}_F(\mathrm{Spec}\, R, X)\ ,$$

называемый функтором точек F-схемы X. F-функтор, изоморфный функтору точек некоторой F-схемы (скажем, схемы X) называется представимым (схемой X); обычный — общекатегорный смысл выражения “представимый функтор” означает в этой терминологии “F-функтор представимый аффинной F-схемой” и будет выражаться более коротко словами “аффинный F-функтор”. Возникающий функтор из категории F-схем в категорию представимых F-функторов (морфизм в последней категории определен просто как произвольное естественное преобразование функторов) является эквивалентностью категорий [5, p. 18, thm. de comparaison]. В частности, категория абстрактных схем эквивалентна категории представимых $\mathbb{Z}$-функторов.

Итак, любой представимый F-функтор $\mathcal{F}$ задает некоторую единственную (с точностью до канонического изоморфизма) F-схему. Эта схема называется геометрической реализацией F-функтора $\mathcal{F}$, или F-схемой, представляющей $\mathcal{F}$, и будет обозначаться тем же символом, что и $\mathcal{F}$.

Пример **8.1.** Пусть V — свободный F-модуль конечного ранга. F-функтор V с $V(R) = V \otimes_F R$ (определенный на морфизмах естественным образом), называется аффинным пространством и представим схемой “аффинное пространство V”.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — F-функторы; $\mathcal{G}$ называется подфунктором в $\mathcal{F}$, если $\mathcal{G}(R)$ является подмножеством в $\mathcal{F}(R)$, а отображение $\mathcal{G}(\varphi)\colon \mathcal{G}(R) \to \mathcal{G}(S)$ — сужением отображения $\mathcal{F}(\varphi)$ для любых алгебр $R, S \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и любого гомоморфизма алгебр $\varphi \in \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(R, S)$.

Прообраз подфунктора $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ относительно морфизма F-функторов $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ определен как подфунктор $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$, для которого $\mathcal{G}'(R)$ — прообраз подмножества $\mathcal{G}(R) \subset \mathcal{F}(R)$ относительно отображения $\mathcal{F}'(R) \to \mathcal{F}(R)$.

Пусть R — коммутативная F-алгебра. Рассмотрим F-функтор $\mathrm{Spec}\, R$; мы имеем:

$$\mathrm{Spec}\, R(S) = \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(R, S) \ \text{ для любой } \ S \in F\text{-}\mathfrak{alg}\ .$$

Зафиксировав некоторый идеал $I \subset R$, можно построить два подфунктора в $\mathrm{Spec}\, R$, взяв в качестве множеств $\mathrm{Hom}(R, S)$ для каждой алгебры S множества

$$\big\{\varphi \in \mathrm{Hom}(R, S) |\ \varphi(I) \cdot S = S\big\} \ \text{ и } \ \big\{\varphi \in \mathrm{Hom}(R, S) |\ \varphi(I) = 0\big\}\ .$$

Произвольный подфунктор $\mathcal{G}$ некоторого F-функтора $\mathcal{F}$ называется открытым (соотв., замкнутым), если для каждой алгебры $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и каждого морфизма $\mathrm{Spec}\, R \to \mathcal{F}$ прообраз $\mathcal{G}$ является подфунктором в $\mathrm{Spec}\, R$ первого (соотв., второго) типа. Этим определением удается пользоваться на практике;

отметим в этой связи, что морфизмы $\operatorname{Spec} R \to \mathcal{F}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с множеством $\mathcal{F}(R)$.

Можно показать, что любой открытый (соотв., замкнутый) пофунктор представимого F-функтора $\mathcal{F}$ представим и, к тому же, некоторой однозначно определенной открытой (соотв., замкнутой) подсхемой F-схемы $\mathcal{F}$.

Говорят, что семейство подфункторов $\{\mathcal{G}_\alpha\}$ некоторого F-функтора $\mathcal{F}$ покрывает $\mathcal{F}$, если

$$\mathcal{F}(R) = \bigcup_\alpha \mathcal{G}_\alpha(R)$$

для любой F-алгебры R являющейся полем. В случае когда функтор $\mathcal{F}$ представим и каждый из подфункторов $\mathcal{G}_\alpha$ открыт или замкнут (или локально замкнут), $\mathcal{F}$ покрывается подфункторами $\mathcal{G}_\alpha$, если и только если F-схема $\mathcal{F}$ покрывается соответствующими подсхемами.

Напротив, пересечение произвольного семейства подфункторов определяется простым — наивным образом:

$$\left(\bigcap_\alpha \mathcal{G}_\alpha\right)(R) = \bigcap_\alpha \mathcal{G}_\alpha(R) \ \text{ для любой } \ R \in F\text{-}\mathfrak{alg}\ .$$

F-функтор $\mathcal{F}$ называется локальным, если для любой алгебры $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и произвольных ее элементов $r_1, \dots, r_l \in R$, порождающих единичный идеал, последовательность отображений множеств

$$\mathcal{F}(R) \to \prod_{i=1}^{l} \mathcal{F}(R_{r_i}) \ \rightrightarrows \ \prod_{i,j=1}^{l} \mathcal{F}(R_{r_i r_j})$$

точна ("точность" также подразумевает инъективность первого отображения), или другими словами, если $\mathcal{F}$ является пучком в топологии Зарисского на категории $F\text{-}\mathfrak{alg}$. Как удается доказать, F-функтор $\mathcal{F}$ представим если и только если он локален и допускает покрытие открытыми аффинными пофункторами [5, p. 18, thm. de comparaison] (геометрическая реализация $\mathcal{F}$ строится в этом случае как прямой предел схем $\operatorname{Spec} R$ по всевозможным морфизмам F-функторов $\operatorname{Spec} R \to \mathcal{F}$, при этом прямой предел берется по отношению ко всем таким морфизмам схем $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} R'$, соответствующий морфизм F-функторов для которых является функтором над $\mathcal{F}$). Таким образом, можно "забыть" о схемах и работать вместо этого с категорией таких F-функторов. Однако мы не делаем этого в полной мере, поскольку нуждаемся в некоторых результатах и понятиях теории схем, разработанной лучше, чем теория F-функторов.

Прямое произведение $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ двух F-функторов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — это F-функтор с

$$(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)(R) = \mathcal{F}_1(R) \times \mathcal{F}_2(R) \quad \text{и} \quad (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)(\varphi) = \mathcal{F}_1(\varphi) \times \mathcal{F}_2(\varphi)\ .$$

Расслоенное произведение $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_2$ двух F-функторов $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}$ над $\mathcal{F}$ — это подфунктор их прямого произведения $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ с

$$\big(\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_2\big)(R) = \mathcal{F}_1(R) \times_{\mathcal{F}(R)} \mathcal{F}_2(R)$$

(пересечение двух подфункторов и, более общо, прообраз подфунктора относительно морфизма F-функторов — примеры расслоенного произведения, с которыми мы уже повстречались).

Пусть L — коммутативная F-алгебра. Так как L-схема — это "то же самое", что и F-схема, дополнительно снабженная морфизмом в $\operatorname{Spec} L$ над F, категория (представимых) L-функторов должна быть эквивалентна категории (представимых) "F-функторов над L", имеющая своими объектами (представимые) F-функторы, снабженные морфизмами в F-функтор $\operatorname{Spec} L$. Такая эквивалентность категорий действительно имеется. Если $\mathcal{F} \to \operatorname{Spec} L$ — объект последней категории, то соответствующий ему L-функтор $\mathcal{G}$ строится напрямую следующим образом: множество $\mathcal{G}(R)$ для $R \in L\text{-}\mathfrak{alg}$ — это прообраз структурного гомоморфизма алгебры R относительно отображения множеств

$$\mathcal{F}(R) \to \operatorname{Spec}(L, R) = \operatorname{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(L, R) ,$$

где R рассматривается как F-алгебра стандартным образом. В обратную сторону, если $\mathcal{G}$ — некоторый L-функтор, то можно получить из него F-функтор $\mathcal{F}$, положив

$$\mathcal{F}(R) = \coprod_{\operatorname{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(L,R)} \mathcal{G}(R) ,$$

и взять очевидный морфизм $\mathcal{F} \to \operatorname{Spec} L$.

Например, если $\mathcal{F}$ — F-функтор, то произведение $\mathcal{F} \times \operatorname{Spec} L$ является F-функтором над L. Соответствующий ему L-функтор обозначается $\mathcal{F} \otimes_F L$. Для любой $R \in L\text{-}\mathfrak{alg}$ имеем: $(\mathcal{F} \otimes_F L)(R) = \mathcal{F}(R)$, где в правой части равенства R рассматривается как F-алгебра.

Еще одним примером может служить определение слоя. Если $f : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ — морфизм F-функторов и $x \in \mathcal{F}(R)$, где $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$, — некоторая R-точка функтора $\mathcal{F}$, расслоенное произведение F-функторов $\operatorname{Spec} R$ и $\mathcal{F}'$ над $\mathcal{F}$ (где $\operatorname{Spec} R \to \mathcal{F}$ — морфизм, задаваемый точкой $x \in \mathcal{F}(R)$) является F-функтором над R. Соответствующий ему R-функтор называется слоем морфизма f над точкой x. Чтобы получить значение функтора слоя на алгебре $S \in R\text{-}\mathfrak{alg}$, следует взять образ точки $x \in \mathcal{F}(R)$ в $\mathcal{F}(S)$, где S рассматривается как F-алгебра, и, затем, прообраз результата в $\mathcal{F}'(S)$.

Введенные определения очевидно согласуются с соответствующими определениями в теории схем (правда, определение слоя применяется в теории схем обычно лишь к случаю, когда x — геометрическая точка, т.е. когда R — поле).

Язык функторов оказывается приспособленным и для описания пучков, скажем, пучков модулей. Мы обсудим этот аспект, поскольку у нас нет подходящего источника, однако обсуждение будет кратким: реально для дальнейшей работы нам потребуется лишь понятие векторного расслоения, заключающее это обсуждение.

Пусть $\mathcal{F}$ — представимый F-функтор. Алгебра $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ с зафиксированным элементом множества $\mathcal{F}(R)$ будет называться $\mathcal{F}$-алгеброй; категорию $\mathcal{F}$-алгебр (морфизмы в этой категории — это по определению гомоморфизмы F-алгебр, отображающие выделенную точку в выделенную точку) обозначим $\mathcal{F}\text{-}\mathfrak{alg}$ (отметим, что в случае, когда $\mathcal{F}$ является спектром некоторой F-алгебры L, категория $\mathcal{F}\text{-}\mathfrak{alg}$ "совпадает" с $L\text{-}\mathfrak{alg}$). Подобно тому, как это происходило и выше, понятие F-функтора над $\mathcal{F}$ эквивалентно понятию $\mathcal{F}$-функтора, т.е. функтора из $\mathcal{F}\text{-}\mathfrak{alg}$ в $\mathfrak{Sets}$. Например, категория $\mathcal{F}$-схем, т.е. схем над $\mathcal{F}$, эквивалентна категории представимых $\mathcal{F}$-функторов. Теперь можно дать такое определение:

Определение **8.2.** Назовем $\mathcal{F}$-функтор $\mathcal{G}$ пучком модулей (над $\mathcal{F}$), если он локален и при этом для каждой алгебры $R \in \mathcal{F}\text{-}\mathfrak{alg}$ множество $\mathcal{G}(R)$ наделено структурой модуля над кольцом R таким образом, что для любого гомоморфизма $\mathcal{F}$-алгебр $R \to S$ отображение $\mathcal{G}(R) \to \mathcal{G}(S)$ является гомоморфизмом R-модулей.

Определение **8.3.** Пучок модулей $\mathcal{G}$ над $\mathcal{F}$ называется квази-когерентным, если для любого гомоморфизма $\mathcal{F}$-алгебр $R \to S$ индуцированный гомоморфизм S-модулей $\mathcal{G}(R) \otimes_R S \to \mathcal{G}(S)$ является изоморфизмом.

Определение **8.4.** Квази-когерентный пучок модулей $\mathcal{G}$ над $\mathcal{F}$ называется когерентным, если R-модуль $\mathcal{G}(R)$ конечно-порожден для каждой алгебры $R \in \mathcal{F}\text{-}\mathfrak{alg}$ (осторожно: в теории схем есть несколько определений квази-когерентности, которые эквивалентны между собой лишь в нетеровом случае [9, chap. II, exercise 5.4]; определение, данное здесь, эквивалентно в общей ситуации определению [9, p. 111, def.]).

Определение **8.5.** Когерентный пучок модулей $\mathcal{G}$ называется локально-свободным (или векторным расслоением), если все модули $\mathcal{G}(R)$ проективны.

Заметим, что в рамках этого языка понятия локально свободного пучка модулей и векторного расслоения не просто эквивалентны, а совпадают! Единственное необходимое здесь дополнительное наблюдение состоит в том, что локально-свободный пучок модулей, определенный предложенным выше способом, допускает открытое покрытие аффинными подфункторами и, тем самым, является представимым $\mathcal{F}$-функтором.

Объединяя определения, данные выше, получаем

Определение **8.6.** Морфизм представимых F-функторов $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ является векторным расслоением, если для любой алгебры $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и любой R-точки $x \in \mathcal{F}(R)$ прообраз $f(R)^{-1}(x)$ точки x относительно отображения множеств $f(R) : \mathcal{G}(R) \to \mathcal{F}(R)$ наделен структурой конечно порожденного проективного R-модуля так что при этом для любого гомоморфизма F-алгебр $\varphi\colon R \to S$ отображение

$$f(R)^{-1}(x) \to f(S)^{-1}(y) \ ,$$

где y — образ точки $x \in \mathcal{F}(R)$ в $\mathcal{F}(S)$, является гомоморфизмом R-модулей, индуцирующим изоморфизм S-модулей

$$S \otimes_R f(R)^{-1}(x) \to f(S)^{-1}(y) \ .$$

Замечание **8.7.** Мы определили векторное расслоение как морфизм с дополнительной структурой. Иногда мы будем называть некоторый морфизм (без дополнительной структуры) векторным расслоением (как это делается и в литературе), если он допускает введение (некоторой) структуры векторного расслоения.

Легко проверить, что наше определение векторного расслоения эквивалентно обычным определениям, принятым в теории схем, например, (исключительно неинвариантному) определению, данному в [9, chap. II, exercise 5.18].

9.

Грассманианы

Начиная с этого места F является полем, а V — некоторым конечномерным векторным пространством над F.

Определение **9.1.** (Полный) грассманиан $\mathbb{\Gamma}(V)$ пространства V — это F-функтор, определенный следующим образом:

- множество $\mathbb{\Gamma}(V)(R)$ для $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ — это множество всех прямых слагаемых R-модуля $V_R = V \otimes_F R$; иначе говоря, $\mathbb{\Gamma}(V)(R)$ состоит из всех таких (проективных) подмодулей $N \subset V_R$, что фактормодуль V_R/N (также) проективен;
- отображение $\mathbb{\Gamma}(V)(R) \to \mathbb{\Gamma}(V)(S)$ для $\varphi \in \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(R, S)$ определено с помощью тензорного умножения на S над R:

$$N \subset V_R \quad \mapsto \quad N \otimes_R S \subset V_S \ .$$

Предложение **9.2.** F-функтор $\mathbb{\Gamma}(V)$ представим, причем представляется гладким и полным F-многообразием.

Доказательство. Сперва убедимся, что функтор $\mathbb{\Gamma}(V)$ локален. Пусть $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и пусть $r_1, \ldots, r_l \in R$ — набор элементов, порождающих единичный идеал. Для любого модуля $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$ выполнено

$$N = V_R \cap \prod_{i=1}^{l} N_{r_i} \quad \subset \prod_{i=1}^{l} V_{R_{r_i}} \ .$$

Таким образом, первая стрелка последовательности

$$\mathbb{\Gamma}(V)(R) \to \prod_{i=1}^{l} \mathbb{\Gamma}(V)(R_{r_i}) \ \rightrightarrows \ \prod_{i,j=1}^{l} \mathbb{\Gamma}(V)(R_{r_i r_j})$$

инъективна. Допустим, что для каждого i задан некоторый R_{r_i}-модуль $N_i \in \mathbb{\Gamma}(V)(R_{r_i})$. Условие, что $(N_i)_{i=1}^{l}$ “уходит в ноль” означает согласованность на пересечениях $\mathrm{Spec}\, R_{r_i} \cap \mathrm{Spec}\, R_{r_j}$, позволяющую склеить из пучков на спектрах $\mathrm{Spec}\, R_{r_i}$, задаваемых этими модулями, в один локально свободный пучок на $\mathrm{Spec}\, R$. Пусть $N \subset V_R$ — соответствующий (проективный) R-модуль. Фактормодуль V_R/N проективен, поскольку каждая из локализаций $(V_R/N)_{r_i}$ проективна. Таким образом, $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$.

Чтобы получить открытое аффинное покрытие, возьмем какой-нибудь эпиморфизм векторных пространств $p\colon V \twoheadrightarrow U$ и рассмотрим подфунктор $\mathcal{U} \subset \mathbb{\Gamma}(V)$, определенный так:

$$\mathcal{U}(R) = \left\{ N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) |\ (p_R)_{|_N} : N \to U_R \text{ является изоморфизмом} \right\},$$

где $p_R : V_R \to U_R$ — гомоморфизм R-модулей, индуцированный p. Зафиксировав какое-нибудь расщепление эпиморфизма p и введя обозначение $U' = \mathrm{Ker}\, p$, мы получим биекцию

$$\mathcal{U}(R) \simeq \mathrm{Hom}_R(U_R, U'_R) \simeq \mathrm{Hom}_F(U, U') \otimes_F R \ .$$

Эта биекция задает изоморфизм F-функторов, отождествляющий $\mathcal{U}$ с аффинным пространством $\mathrm{Hom}_F(U, U')$.

Чтобы показать, что пофунктор $\mathcal{U}$ открыт в $\mathbb{\Gamma}(V)$, рассмотрим произвольный морфизм $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{\Gamma}(V)$ и соответствующую ему R-точку $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$. Имеем:

$$N \in \mathcal{U}(R) \;\Leftrightarrow\; p_{R|_N} \text{ — изоморфизм } \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Coker}(p_{R|_N}) = 0 \text{ и } \operatorname{rk} N \le n\,,$$

где $n = \dim U$. Условие $\operatorname{rk} N \le n$ можно заменить на условие обнуления $(n+1)$-ой внешней степени $\Lambda^{n+1}N$ модуля N. Положим $P = \operatorname{Coker}(p_{R|_N}) \oplus \Lambda^{n+1}N$. Тогда для любого гомоморфизма $\varphi \in \operatorname{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(R, S)$, мы имеем

$$N \otimes_R S \in \mathcal{U}(S) \;\Leftrightarrow\; P \otimes_R S = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(\operatorname{Ann} P) \cdot S = S\,,$$

где $\operatorname{Ann} P$ — аннулятор модуля P; последняя эквивалентность имеет место по следующей причине

Лемма **9.3.** *Пусть $\varphi\colon R \to S$ — какой-либо гомоморфизм коммутативных колец, P — некоторый конечно-порожденный R-модуль. Тензорное произведение $P \otimes_R S$ нулевое, если и только если подмножество $\varphi(\operatorname{Ann} P) \subset S$ порождает единичный идеал.*

Доказательство. Если множество $\varphi(\operatorname{Ann} P)$ порождает единичный идеал, то S-модуль $P \otimes_R S$ порожден элементами вида $p \otimes \varphi(r)$, где $r \in \operatorname{Ann} P$ и $p \in P$; поскольку $p \otimes \varphi(r) = p \cdot r \otimes 1 = 0$, получается, что $P \otimes_R S = 0$.

Теперь предположим, что $\varphi(\operatorname{Ann} P) \cdot S \ne S$. Возьмем какой-нибудь максимальный идеал $\mathfrak{M} \subset S$, содержащий $\varphi(\operatorname{Ann} P)$, и положим $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$. Так как $\mathfrak{p}$ — простой идеал, содержащий $\operatorname{Ann} P$, и модуль P конечно-порожден, имеем $P_{\mathfrak{p}} \ne 0$. По лемме Накаямы (здесь мы снова используем тот факт, что модуль P конечно-порожден) имеем: $(P/P\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \ne 0$. Поскольку $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow S/\mathfrak{M}$ — расширение полей, $S/\mathfrak{M}$-модуль $P \otimes_R S/\mathfrak{M}$ тоже ненулевой. Следовательно, $P \otimes_R S \ne 0$. □

Как видим, прообраз подфунктора $\mathcal{U}$ относительно морфизма $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{\Gamma}(V)$ является открытым подфунктором в $\operatorname{Spec} R$ (заданным идеалом $\operatorname{Ann} P \subset R$). Таким образом, $\mathcal{U}$ — открытый подфунктор грассманиана.

Лемма **9.4.** *Грассманиан $\mathbb{\Gamma}(V)$ покрывается конечным числом подфункторов вида $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть E — некоторый F-базис векторного пространства V. Каждое подмножество E' векторов базиса E задает подфунктор типа $\mathcal{U}$, а именно, — подфунктор, определяемый эпиморфизмом пространства V на его факторпространство по линейной оболочке E'. Утверждается, что полученные таким образом (при переборе всех возможных подмножеств) подфункторы и образуют покрытие.

Согласно определению покрытия, мы должны проверить, что множество $\mathbb{\Gamma}(V)(L)$ покрывается своими подмножествами $\mathcal{U}(L)$ для любого поля $L \in F\text{-}\mathfrak{alg}$. Возьмем произвольный элемент $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(L)$ и выберем максимальное подмножество $E' \subset E$ такое что L-подпространство $U'_L \subset V_L$ имеет тривиальное пересечение с N, где U' — F-подпространство V, натянутое на выбранное E'. Тогда $U'_L \oplus N = V_L$ и, следовательно, $N \in \mathcal{U}(L)$, где $\mathcal{U}$ — подфунктор, построенный по E'. □

Итак, нами построено конечное открытое покрытие аффинными пространствами. Следовательно, грассманиан представляется гладкой F-схемой конечного типа.

Собственность этой схемы легко проверить, воспользовавшись так называемым валюативным критерием собственности [5, p. 134, cor. 2.9, 2.10] или [9, chap. II, thm. 4.7]: для любой алгебры $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$, являющейся кольцом нормирования, отображение

$$\mathbb{\Gamma}(V)(R) \to \mathbb{\Gamma}(V)(\text{поле частных кольца } R)$$

очевидно биективно (инъективность этого отображения означает отделимость схемы $\mathbb{\Gamma}(V)$, а сюръективность — ее универсальную замкнутость). $\square$

Замечание **9.5.** Имеется и непосредственный способ удостовериться в отделимости грассманиана $\mathbb{\Gamma}(V)$: его диагональ — это подфунктор в $\mathbb{\Gamma}(V)^{\times 2}$, множество R-точек которого есть

$$\left\{(N_1, N_2) \in \mathbb{\Gamma}(V)^{\times 2} \mid N_1 \subset N_2 \text{ и } N_2 \subset N_1\right\},$$

так что эта диагональ является пересечением двух флаговых подфункторов в $\mathbb{\Gamma}(V)^{\times 2}$, которые замкнуты по (11.2).

Замечание **9.6.** В дальнейшем нам предстоит рассмотреть довольно много различных подфункторов произведений $\mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}$, $m \in \mathbb{N}$. Все они автоматически окажутся представимыми полными F-многообразиями. Однако для проверки того, что некоторые из этих подфункторов будут гладкими или, по крайней мере, (геометрически) редуцированными, потребуются специальные усилия.

Клеточная структура

Пусть $p\colon V \twoheadrightarrow W$ — некоторый эпиморфизм векторных F-пространств. Определим возрастающую фильтрацию

$$\emptyset = \mathbb{\Gamma}(V)_{(-1)} \subset \mathbb{\Gamma}(V)_{(0)} \subset \cdots \subset \mathbb{\Gamma}(V)_{(\dim W)} = \mathbb{\Gamma}(V)$$

следующим образом:

$$\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)} = \left\{N \in \mathbb{\Gamma}(V) \mid \Lambda^{i+1} p_R(N) = 0\right\}$$

где гомоморфизм $p_R : V_R \to W_R$ индуцирован гомоморфизмом p, а Λ^{i+1} — $(i+1)$-ая внешняя степень.

Лемма **9.7.** Каждый из подфункторов $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$ замкнут в $\mathbb{\Gamma}(V)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{\Gamma}(V)$ — некоторый морфизм и $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$ — соответствующая ему R-точка. Положим $M = \Lambda^{i+1} p_R(N)$. Это подмодуль свободного модуля $\Lambda^{i+1} W_R$. По определению $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$ мы имеем:

$$N \in \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}(R) \quad \Leftrightarrow \quad M = 0\,.$$

Следовательно, если $\varphi\colon R \to S$ — какой-нибудь гомоморфизм коммутативных F-алгебр, а $\varphi^{\Lambda^{i+1}W} : \Lambda^{i+1} W_R \to \Lambda^{i+1} W_S$ — индуцированный гомоморфизм R-модулей, то

$$N \otimes_R S \in \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}(S) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{\Lambda^{i+1}W}(M) = 0\,.$$

Правое условие означает что $\varphi(r) = 0$ для каждой координаты $r \in R$ каждого элемента модуля M в каком-либо фиксированном базисе модуля $\Lambda^{i+1} W_R$. Таким образом, прообраз подфунктора $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)} \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ относительно морфизма $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{\Gamma}(V)$ является замкнутым подфунктором спектра $\operatorname{Spec} R$, задаваемым идеалом, состоящим из этих r. □

Лемма **9.8.** Для всех $i \geq 0$ разность $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ — это подфунктор в $\mathbb{\Gamma}(V)$, у которого

$$\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}(R) = \\ = \left\{N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) \middle| \, p_R(N) \text{ является прямым слагаемым в } W_R \text{ ранга } i\right\} .$$

Доказательство. Давайте просто обозначим через $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ подфунктор в $\mathbb{\Gamma}(V)$, заданный выписанной выше формулой. Нам нужно показать, что этот функтор является разностью $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$ и $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i-1)}$. Для начала заметим, что $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ — действительно функтор. Более того, он, очевидно, содержится в $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$ и не пересекается $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i-1)}$. Настолько же очевидно, что $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i-1)}$ и $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ покрывают $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$. Следовательно, доказательство будет завершено, когда мы покажем, что F-функтор $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ локален и допускает покрытие подфункторами, открытыми в $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$.

Так как $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ является подфунктором локального F-функтора, инъективность первой стрелки последовательности

$$\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}(R) \to \prod_{j=1}^{l} \mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}(R_{r_j}) \rightrightarrows \prod_{j,k=1}^{l} \mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}(R_{r_j r_k})$$

в доказательстве не нуждается. Взяв элемент в среднем члене, "умирающий" при переходе вправо, и используя локальность функтора $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$, мы получаем модуль $N \in \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}(R)$, такой что фактормодуль $W_R/p_R(N)$ проективен и имеет ранг $\dim W - i$. Следовательно, $N \in \mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}(R)$, так что F-функтор $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ действительно локален.

Пусть $q : W \twoheadrightarrow U$ — некоторый эпиморфизм векторных пространств, причем $\dim U = i$. Определим подфунктор $\mathcal{U} \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ следующим образом:

$$\mathcal{U}(R) = \left\{N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) \middle| \, (q_R)\big|_{p_R(N)} : p_R(N) \to U_R \text{ является изоморфизмом}\right\} .$$

Ясно, что на самом деле $\mathcal{U} \subset \mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ и что все $\mathcal{U}$ (которые можно получить подобным образом) вместе покрывают $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$. Чтобы увидеть, что $\mathcal{U}$ открыт в $\mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$, возьмем произвольную R-точку $N \in \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}(R)$. Имеем:

$$N \in \mathcal{U}(R) \;\Leftrightarrow\; (q_R)\big|_{p_R(N)} \text{ является изоморфизмом } \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; \operatorname{Coker}\left((q_R)\big|_{p_R(N)}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Coker}\left((q_R \circ p_R)\big|_N\right) = 0 .$$

Вот объяснение почему имеет место вторая равносильность: так как U_R — свободный R-модуль ранга i и при этом $\Lambda^{i+1} p_R(N) = 0$, гомоморфизм

$$(q_R)\big|_{p_R(N)} : p_R(N) \to U_R$$

биективен если и только если он сюръективен.

Полагая $P = \operatorname{Coker}\left((q_R \circ p_R)\big|_N\right)$, для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(R, S)$ мы, тем самым, получаем

$$N \otimes_R S \in \mathcal{U}(S) \;\Leftrightarrow\; P \otimes_R S = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(\operatorname{Ann} P) \cdot S = S$$

(вторая равносильность имеет место согласно (9.3)). Это показывает, что прообраз подфунктора $\mathcal{U} \subset \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$ относительно морфизма $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}$, определяемого R-точкой $N \in \mathbb{\Gamma}(V)_{(i)}(R)$, является открытым подфунктором в $\operatorname{Spec} R$, задаваемым идеалом $\operatorname{Ann} P \subset R$. □

Следствие **9.9.** Как и в *(6.2),* положим $\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V) = \coprod \mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$. Тогда

$$\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)(R) = \bigl\{N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) | \; p_R(N) \text{ является прямым слагаемым в } W_R\bigr\}$$

для любой алгебры $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$.

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)$ подфунктор в $\mathbb{\Gamma}(V)$ с

$$\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)(R) = \bigl\{N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) | \; p_R(N) \text{ является прямым слагаемым в } W_R\bigr\}$$

для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$. То, что схема $\coprod \mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)}$ представляет F-функтор $\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)$, легко проверить напрямую.

Можно обойтись и без перехода к схемам: F-функтор $\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)$ локален (это проверяется так же, как в доказательстве предыдущего утверждения), подфункторы

$$\mathbb{\Gamma}(V)_{(i\setminus i-1)} \subset \operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)$$

дизъюнктны, покрывают $\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)$, и каждый из них открыт (и замкнут). □

Лемма **9.10.** Имеется морфизм векторного расслоения

$$\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V) \to \mathbb{\Gamma}(W) \times \mathbb{\Gamma}(W'),$$

где $W' = \operatorname{Ker}(p\colon V \to W)$.

Доказательство. Пусть $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$, $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$. Так как модуль $p_R(N)$ в точной последовательности

$$0 \longrightarrow N \cap W'_R \longrightarrow N \xrightarrow{p_R} p_R(N) \longrightarrow 0$$

проективен (будучи прямым слагаемым свободного модуля W_R), пересечение $N \cap W'_R$ является прямым слагаемым в N. В связи с тем, что N — прямое слагаемое в V_R, это пересечение является также прямым слагаемым в V_R а следовательно, и прямым слагаемым промежуточного модуля W'_R. Таким образом, возникает отображение

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)(R) & \to & \mathbb{\Gamma}(W)(R) \times \mathbb{\Gamma}(W')(R) \\ N & \mapsto & \Bigl(p_R(N),\; N \cap W'_R\Bigr)\,, \end{array}$$

как раз и определяющее тот морфизм F-функторов, что имеется ввиду в условии леммы.

Чтобы получить структуру векторного расслоения на этом морфизме, зафиксируем какое-нибудь расщепление эпиморфизма $p : V \to W$, иными словами, отождествим W с некоторым подпространством пространства V, дополняющим W'. Возьмем произвольные $M \in \mathbb{\Gamma}(W)(R)$ и $M' \in \mathbb{\Gamma}(W')(R)$. R-модули $N \in \operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)(R)$, для которых

$$p_R(N) = M \;\text{ и }\; N \cap W'_R = M'\,,$$

находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами множества $\operatorname{Hom}_R(M, W'_R/M')$: для $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, W'_R/M')$ соответствующий подмодуль $N \subset V_R = W_R \oplus W'_R$ — это объединение $m+\varphi(m) \subset W_R \oplus W'_R$ по всем $m \in M$; для $N \in \operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)(R)$ соответствующий гомоморфизм $p_R(N) \to W'_R/(N \cap W'_R)$ отображает $p_R(n)$ (для каждого $n \in N$) в класс (по модулю $N \cap W'_R$) второй компоненты элемента $n \in W_R \oplus W'_R$.

Поскольку M и W'_R/M' — конечно-порожденные проективные R-модули, R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, W'_R/M')$ — тоже конечно-порожден и проективен. Для проверки того, что нами получена структура векторного расслоения, остается доказать, что для любого гомоморфизма коммутативных F-алгебр $R \to S$ естественный гомоморфизм S-модулей

$$f(M)\colon \mathrm{Hom}_R(M, W'_R/M') \otimes_R S \to \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, W'_S/M' \otimes_R S)$$

является изоморфизмом. Поскольку $f(R)$ — изоморфизм и

$$f(M_1 \oplus M_2) = f(M_1) \oplus f(M_2),$$

$f(M)$ — изоморфизм для любого модуля M, изоморфного прямому слагаемому в R^n при некотором $n \geq 1$, т.е. для любого конечно-порожденного проективного M. □

Следствие **9.11.** *Пусть $0 \to W' \to V \to W \to 0$ — точная последовательность векторных F-пространств. Грассманиан $\mathbb{\Gamma}(V)$ вместе с фильтрацией (9.7) и морфизмом векторного расслоения (9.10) является относительным клеточным пространством над $\mathbb{\Gamma}(W) \times \mathbb{\Gamma}(W')$.* □

Замечание **9.12.** Структура векторного расслоения на морфизме $\mathrm{Gr}\,\mathbb{\Gamma}(V) \to \mathbb{\Gamma}(W) \times \mathbb{\Gamma}(W')$, построенная в доказательстве последней леммы, зависит (по построению) от выбора расщепления эпиморфизма $V \twoheadrightarrow W$; однако сам морфизм, так же как и фильтрация на $\mathbb{\Gamma}(V)$, т.е., собственно, данные, определяющие клеточную структуру, не зависят от выбора расщепления.

Следствие **9.13.** *В категории соответствий $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм*

$$\mathbb{\Gamma}(V) \simeq \mathbb{\Gamma}(W) \times \mathbb{\Gamma}(W') .$$

В частности,

$$\mathrm{H}\left(\mathbb{\Gamma}(V)\right) \simeq \mathrm{H}\left(\mathbb{\Gamma}(W) \times \mathbb{\Gamma}(W')\right)$$

для любой геометрической теории когомологий H *(§2).* □

Компоненты

Определение **9.14.** Для каждого $n \in \mathbb{Z}$, n-грассманиан $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ пространства V — это подфунктор в $\mathbb{\Gamma}(V)$, для которого $\mathbb{\Gamma}_n(V)(R)$ ($R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$) — это подмножество в $\mathbb{\Gamma}(V)(R)$, состоящее из прямых слагаемых, имеющих постоянный ранг n (конечно, подфунктор $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ непуст, только если $0 \leq n \leq \dim V$).

Предложение **9.15.** *F-функтор $\mathbb{\Gamma}(V)$ является прямой суммой своих подфункторов $\mathbb{\Gamma}_n(V)$, $n \in \mathbb{Z}$. Многообразия $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ геометрически неприводимы.*

Доказательство. Утверждение относительно прямой суммы можно доказать подобным же образом, что и (9.9), или же, используя (9.9), следующим образом. Возьмем в качестве эпиморфизма p тождественное отображение $V \to V$. Тогда

$$\mathbb{\Gamma}(V) = \mathrm{Gr}\,\mathbb{\Gamma}(V) = \coprod_n \mathbb{\Gamma}(V)_{(n \setminus n-1)} = \coprod_n \mathbb{\Gamma}_n(V) ,$$

где первое равенство справедливо (для такого p) ввиду (9.9), второе — по определению того, что такое Gr, а третье — поскольку $\mathbb{\Gamma}(V)_{(n\setminus n-1)} = \mathbb{\Gamma}_n(V)$ для нашего конкретного p.

Чтобы показать, что $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ геометрически неприводим, рассмотрим полную линейную группу $\mathbb{GL}(V)$. Для любой алгебры $R \in F$-$\mathfrak{alg}$ (абстрактная) группа

$$\mathbb{GL}(V)(R) = \mathrm{Aut}_R(V_R)$$

действует естественным образом на множестве $\mathbb{\Gamma}_n(V)(R)$, так что имеется морфизм F-функторов

$$\mathbb{GL}(V) \times \mathbb{\Gamma}_n(V) \to \mathbb{\Gamma}_n(V),$$

определяющий действие алгебраической группы $\mathbb{GL}(V)$ на этом n-грассманиане. Описанное действие является транзитивным в том смысле, что если R — поле, то действие "на уровне R-точек" транзитивно. Так как аффинная группа $\mathbb{GL}(V)$ (геометрически) неприводима, получается, что многообразие $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ тоже геометрически неприводимо. □

Замечание **9.16.** Многообразия $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ проективны: для любого $n \in \mathbb{Z}$, отображение

$$N \in \mathbb{\Gamma}_n(V)(R) \quad \mapsto \quad \Lambda^n N \in \mathbb{\Gamma}_1(\Lambda^n V)(R)$$

задает морфизм F-функторов, отождествляющий $\mathbb{\Gamma}_n(V)$ с замкнутым подмногообразием проективного пространства $\mathbb{\Gamma}_1(\Lambda^n V)$.

Следствие **9.17.** *В условиях (9.11), пусть* H^* *— градуированная геометрическая теория когомологий (§4). Для любого* $n \in \mathbb{Z}$ *имеется изоморфизм*

$$\mathrm{H}^*\big(\mathbb{\Gamma}_n(V)\big) \simeq \coprod_{i=0}^{n} \mathrm{H}^*\big(\mathbb{\Gamma}_i(W) \times \mathbb{\Gamma}_{n-i}(W')\big)[-i(\dim W' - n + i)]\ .$$

Доказательство. Следует из (6.11) и того, что

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Hom}_R(M, W'_R/M') = \mathrm{rk}\, M \cdot \mathrm{rk}(W'_R/M') = i \cdot (\dim_F W' - n + i),$$

если $M \in \mathbb{\Gamma}_i(W)(R)$, а $M' \in \mathbb{\Gamma}_{n-i}(W')(R)$. □

10.

Многообразия идеалов

Определение **10.1.** Фиксируем некоторый эндоморфизм $f\colon V \to V$ и определим подфунктор $\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{inv}}(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ следующим образом:

$$\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{inv}}(V)(R) = \big\{N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) |\ f_R(N) \subset N\big\}$$

для каждой $R \in F$-$\mathfrak{alg}$, где $f_R\colon V_R \to V_R$ — эндоморфизм, индуцированный f.

Лемма **10.2.** *Подфунктор* $\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{inv}}(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ *замкнут.*

Доказательство. Возьмем произвольный морфизм $\mathrm{Spec}\, R \to \mathbb{\Gamma}(V)$ и обозначим через $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$ соответствующую ему R-точку. Выберем какое-нибудь расщепление s проекции $p\colon V_R \to V_R/N$ и положим

$$M = (s \circ p)\big(f(N)\big) \subset V_R\ .$$

Имеем:

$$N \in \mathbb{\Gamma}^{\mathrm{inv}}(V)(R) \quad \Leftrightarrow \quad M = 0\ .$$

Следовательно, если $\varphi\colon R \to S$ — некоторый гомоморфизм коммутативных F-алгебр, а $\varphi^V : V_R \to V_S$ — индуцированный им гомоморфизм R-модулей, то

$$N \otimes_R S \in \mathbb{\Gamma}^{\mathrm{inv}}(V)(S) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^V(M) = 0\,.$$

Условие $\varphi^V(M) = 0$ означает, что $\varphi(r) = 0$ для каждой координаты $r \in R$ каждого элемента модуля M в каком-нибудь фиксированном базисе свободного модуля V_R. Поэтому прообраз подфунктора $\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{inv}}(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ относительно морфизма $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{\Gamma}(V)$ является замкнутым подфунктором в $\operatorname{Spec} R$, задаваемым идеалом кольца R, состоящим из всех этих r. □

Пусть A — произвольная F-алгебра, конечномерная над F, а V — конечнопорожденный A-модуль (являющийся, тем самым, и конечномерным векторным пространством над F).

Определение **10.3.** Определим подфунктор $\mathbb{\Gamma}^A(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ следующим образом:

$$\mathbb{\Gamma}^A(V)(R) = \big\{ N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R) |\ N \text{ является } A_R\text{-подмодулем в } V_R \big\}$$

для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$. F-функтор $\mathbb{\Gamma}^A(A)$, который получается, если рассматривать A как правый модуль над собой, будем называть многообразием *(*правых*)* идеалов алгебры A и обозначать более коротко через $\mathbb{\Gamma}^A$.

Следствие **10.4.** *Подфунктор $\mathbb{\Gamma}^A(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ замкнут (и, следовательно, представляется полным F-многообразием).*

Доказательство. Умножение на любой элемент $a \in A$ задает F-эндоморфизм пространства V, и, тем самым, — замкнутый подфунктор вида (10.2). Так как $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$ является A_R-подмодулем в V_R, если и только если N отображается в себя при умножении на любой элемент $a \in A$, пересечение всех этих замкнутых подфункторов дает $\mathbb{\Gamma}^A(V)$. □

Лемма **10.5.** *Пусть A_1 и A_2 — две произвольный конечномерные F-алгебры. Тогда $\mathbb{\Gamma}^{A_1 \times A_2} \simeq \mathbb{\Gamma}^{A_1} \times \mathbb{\Gamma}^{A_2}$.*

Доказательство. Для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ мы имеем:

$$(A_1 \times A_2)_R \simeq (A_1)_R \times (A_2)_R\,,$$

откуда $\mathbb{\Gamma}^{A_1 \times A_2}(R) \simeq \mathbb{\Gamma}^{A_1}(R) \times \mathbb{\Gamma}^{A_2}(R)$. □

Определение **10.6.** Конечномерная F-алгебра A называется сепарабельной, если при расширении скаляров до любого поля, содержащего F, из нее получается полупростая алгебра. Эквивалентное определение: алгебра A сепарабельна, если она полупроста и, при этом, центр каждой ее простой компоненты является (конечным) сепарабельным расширением поля F [4, §71, exercise 2]. Другое эквивалентное определение: A сепарабельна, если для некоторого сепарабельного расширения E/F алгебра A_E изоморфна прямому произведению матричных алгебр.

Пусть A — сепарабельная F-алгебра, а V — конечно-порожденный A-модуль.

Лемма **10.7** (Эквивалентность Мориты)**.** *Положим $B = \operatorname{End}_A V$. Тогда $\mathbb{\Gamma}^A(V) \simeq \mathbb{\Gamma}^B$.*

Доказательство. По своему определению, множество $\mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$ для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ состоит из A_R-подмодулей N модуля V_R таких что точная последовательность

$$(*) \qquad 0 \to N \to V_R \to V_R/N \to 0$$

расщепляется над R. Однако, поскольку A_R является обобщенной R-алгеброй Адзумаи, а R-модуль V_R/N — конечно представим, последовательность $(*)$ имеет расщепление и над A_R [20, prop. 3.1]; итак, множество $\mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$ состоит из прямых слагаемых A_R-модуля V_R.

Для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ справедливо: $B_R = B \otimes_F R$ есть обобщенная R-алгебра Адзумаи, изоморфная алгебре $\operatorname{End}_{A_R} V_R$, а V_R имеет структуру левого B_R-модуля. Так как модуль V_R конечно-порожден и проективен (на самом деле, даже свободен) над R, он конечно-порожден и проективен как модуль над A_R и как модуль над B_R [20, cor. 3.2], а следовательно, является прообразующим в категории A_R-modules [6, prop. and def. 4.3]. Значит, по теории Мориты [6, thm. 4.29], функтор

$$\begin{array}{ccc} A_R\text{-}\mathfrak{mod} & \to & B_R\text{-}\mathfrak{mod} \\ N & \mapsto & \operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, N) \end{array}$$

реализует эквивалентность категории (правых) A_R-модулей и категории (правых) B_R-модулей (в этой формуле абелева группа $\operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, N)$ рассматривается как B_R-модуль естественным образом. Обратная эквивалентность определяется так:

$$\begin{array}{ccc} B_R\text{-}\mathfrak{mod} & \to & A_R\text{-}\mathfrak{mod} \\ M & \mapsto & \operatorname{Hom}_{B_R}(V_R^*, M) \end{array},$$

где $V_R^* = \operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, A_R) \in B\text{-}\mathfrak{mod}$. Каждая из этих двух (взаимно-обратных) эквивалентностей аддитивна (и сохраняет включения), а модуль $V_R \in A_R\text{-}\mathfrak{mod}$ соответствует модулю $B_R \in B_R\text{-}\mathfrak{mod}$. Таким образом, сужая рассматриваемые A_R-модули до прямых слагаемых в V_R, а рассматриваемые B_R-модули — до прямых слагаемых (идеалов) в B_R, мы получаем биекцию

$$\mathbb{\Gamma}^A(V)(R) \simeq \mathbb{\Gamma}^B(R) .$$

Эта биекция задает изоморфизм F-функторов, так как

$$\operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, N) \otimes_R S \simeq \operatorname{Hom}_{A_S}(V_S, N \otimes_R S)$$

для любой $R \to S \in \operatorname{Hom}_{F\text{-}\mathfrak{alg}}(R, S)$. □

Следствие **10.8.** Многообразие $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ является гладким.

Доказательство. Пусть $B = \operatorname{End}_A V$ и пусть $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F. Так как B — сепарабельная F-алгебра, $\bar{F}$-алгебра $B_{\bar{F}}$ изоморфна произведению

$$\operatorname{End}_{\bar{F}} W_1 \times \cdots \times \operatorname{End}_{\bar{F}} W_n$$

с некоторыми векторными $\bar{F}$-пространствами $W_1, \ldots, W_n$. Имеем:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{\Gamma}^A(V) \simeq \mathbb{\Gamma}^B & \text{по } (10.7)\ ; \\ \mathbb{\Gamma}^{B_{\bar{F}}} \simeq \mathbb{\Gamma}^{\operatorname{End} W_1} \times \cdots \times \mathbb{\Gamma}^{\operatorname{End} W_n} & \text{по } (10.5)\ . \end{array}$$

Таким образом, многообразие $\mathbb{\Gamma}^A(V)_{\bar{F}}$ изоморфно гладкому многообразию $\mathbb{\Gamma}(W_1) \times \cdots \times \mathbb{\Gamma}(W_n)$. □

Теорема **10.9.** Пусть A — сепарабельная F-алгебра и пусть

$$0 \to W' \to V \to W \to 0$$

— точная последовательность конечно-порожденных A-модулей. Многообразие $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ является относительным клеточным пространством над $\mathbb{\Gamma}^A(W) \times \mathbb{\Gamma}^A(W')$.

Доказательство. Утверждается, что (уже построенная ранее) клеточная структура (9.11) на $\mathbb{\Gamma}(V)$ индуцирует в смысле (7.6) искомую клеточную структуру на $\mathbb{\Gamma}^A(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)$. Чтобы удостовериться в этом, следует проверить, что сужение морфизма векторного расслоения

$$\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V) \to \mathbb{\Gamma}(W) \times \mathbb{\Gamma}(W')$$

на

$$\operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}^A(V) = \mathbb{\Gamma}^A(V) \cap \operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}(V)$$

является векторным расслоением над $\mathbb{\Gamma}^A(W) \times \mathbb{\Gamma}^A(W')$.

Чтобы определить требую структуру векторного расслоения на этом морфизме, зафиксируем какое-либо A-расщепление эпиморфизма $V \twoheadrightarrow W$, т.е. отождествим W с некоторым A-подмодулем в V, дополнительным к W'. Возьмем любые $M \in \mathbb{\Gamma}^A(W)(R)$ и $M' \in \mathbb{\Gamma}^A(W')(R)$. Такие модули $N \in \operatorname{Gr}\mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$, для которых

$$p_R(N) = M \quad \text{и} \quad N \cap W'_R = M' ,$$

состоят во взаимно-однозначном соответствии с элементами конечно-порожденного проективного R-модуля $\operatorname{Hom}_{A_R}(M, W'_R/M')$ (ср. с доказательством (9.10)). Для любого гомоморфизма коммутативных F-алгебр $R \to S$, естественный гомоморфизм S-модулей

$$\operatorname{Hom}_{A_R}(M, W'_R/M') \otimes_R S \to \operatorname{Hom}_{A_S}(M \otimes_R S, W'_S/M' \otimes_R S)$$

является изоморфизмом. Доказательство завершено. □

Следствие **10.10.** В категории соответствий $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм

$$\mathbb{\Gamma}^A(V) \simeq \mathbb{\Gamma}^A(W) \times \mathbb{\Gamma}^A(W') .$$

В частности,

$$\mathrm{H}\left(\mathbb{\Gamma}^A(V)\right) \simeq \mathrm{H}\left(\mathbb{\Gamma}^A(W) \times \mathbb{\Gamma}^A(W')\right)$$

для любой геометрической теории когомологий H. □

Следствие **10.11.** Обозначая через $\mathrm{M}_n(A)$ алгебру матриц размером $n \times n$, составленных из элементов A, имеем в категории $\mathcal{CV}$ изоморфизм $\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{M}_n(A)} \simeq \mathbb{\Gamma}^{A^{\times n}}$.

Доказательство. Так как $\mathrm{M}_n(A) = \operatorname{End}_A(A^n)$, имеется изоморфизм $\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{M}_n(A)} \simeq \mathbb{\Gamma}^A(A^n)$. Используя точную последовательность

$$0 \to A^{n-1} \to A^n \to A \to 0$$

и индукцию по n, получаем в категории $\mathcal{CV}$ изоморфизм $\mathbb{\Gamma}^A(A^n) \simeq (\mathbb{\Gamma}^A)^{\times n}$. Для завершения доказательства применяем (10.5). □

Определение **10.12.** Произвольная сепарабельная алгебра A изоморфна произведению
$$\mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{M}_{n_m}(D_m)$$
с некоторыми сепарабельными алгебрами с делением $D_1, \dots, D_m$. Назовем сепарабельную алгебру
$$D_1^{\times n_1} \times \cdots \times D_m^{\times n_m}$$
анизотропным ядром алгебры A и обозначим ее через A_{an} (определение алгебры A_{an} неканонично; однако класс изоморфности алгебры A_{an} однозначно определен).

Теорема **10.13.** Для любой сепарабельной алгебры A в категории $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм $\mathbb{\Gamma}^A \simeq \mathbb{\Gamma}^{A_{\mathrm{an}}}$. □

Пример **10.14.** Мы сейчас рассмотрим некоторую специальную ситуацию, которая возникнет в §15. Предположим, что задано некоторое разложение модуля $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ в прямую сумму A-модулей. Используя точные последовательности
$$0 \to V_2 \oplus V_3 \to V \to V_1 \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to V_2 \to V_2 \oplus V_3 \to V_3 \to 0$$
и композицию относительных структур (7.4), превратим $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ в относительное (клеточное) пространство над $\mathbb{\Gamma}^A(V_1)\times\mathbb{\Gamma}^A(V_2)\times\mathbb{\Gamma}^A(V_3)$: множество $\mathrm{Gr}\,\mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$ для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ состоит из $N \in \mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$ таких что проекция N на $(V_1)_R$ лежит в $\mathbb{\Gamma}^A(V_1)(R)$, а проекция $N\cap(V_2\oplus V_3)_R$ на $(V_3)_R$ лежит в $\mathbb{\Gamma}^A(V_3)_R$ (в этом случае автоматически $N \cap (V_2)_R \in \mathbb{\Gamma}^A(V_2)(R)$).

Фиксируем некоторую тройку модулей
$$(N_1, N_2, N_3) \in \Big(\mathbb{\Gamma}^A(V_1) \times \mathbb{\Gamma}^A(V_2) \times \mathbb{\Gamma}^A(V_3)\Big)(R)$$
и фиксируем какие-нибудь A_R-модули N'_j такие что $(V_j)_R = N_j \oplus N'_j$ для $j = 2, 3$. Множество модулей $N \in \mathrm{Gr}\,\mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$, лежащих над этой фиксированной тройкой находится во взаимно-однозначном соответствии с элементами множества
$$\mathrm{Hom}_{A_R}(N_1, N'_2) \oplus \mathrm{Hom}_{A_R}(N_1, N'_3) \oplus \mathrm{Hom}_{A_R}(N_3, N'_2)\ .$$
Для элемента выписанной суммы $f_{12}\oplus f_{13}\oplus f_{32}$ соответствующий A_R-модуль $N \subset V$ есть
$$N = \big\{n_1 + n_2 + f_{12}(n_1) + f_{32}(n_3) + n_3 + f_{13}(n_1)|\ n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, n_3 \in N_3\big\}\ .$$

Компоненты

Мы произведем вычисление компонент многообразия $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ лишь в случае центральной простой алгебры A. Итак, пусть A — некоторая конечномерная центральная простая F-алгебра, а V — некоторый конечно-порожденный A-модуль.

Мы обозначаем через $\deg A$ (степень A) — квадратный корень из $\dim_F A$, а через $\mathrm{rk}_A V$ (ранг V над A) — целое число $\dim_F V/\deg A$.

Разложение грассманиана в прямую сумму своих компонент (9.15) индуцирует разложение
$$\mathbb{\Gamma}^A(V) = \coprod_n \mathbb{\Gamma}^A(V) \cap \mathbb{\Gamma}_n(V)\ .$$

Лемма **10.15.** *Если n не делится на $\deg A$, то пересечение $\mathbb{\Gamma}^A(V) \cap \mathbb{\Gamma}_n(V)$ пусто.*

Доказательство. Возьмем произвольные $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и $N \in \mathbb{\Gamma}_n(V)(R)$. Пусть $R \to L$ — гомоморфизм F-алгебр, причем L — поле. Если R-модуль N является A_R-модулем, то $N \otimes_R L$ — модуль над центральной простой алгеброй A_L; поэтому число $n = \dim_L N$ делится на $\deg A_L = \deg A$. $\square$

В связи с только что доказанным фактом естественно дать такое

Определение **10.16.** Мы полагаем

$$\mathbb{\Gamma}^A_n(V) = \mathbb{\Gamma}^A(V) \cap \mathbb{\Gamma}_{n\cdot\deg A}(V) \quad \subset \mathbb{\Gamma}(V)\ .$$

Аналогичным образом определенные F-функторы $\mathbb{\Gamma}^A_n$ называются обобщенными многообразиями Севери-Брауэра алгебры A [2]; $\mathbb{\Gamma}^A_1$ называется многообразием Севери-Брауэра A [1].

Лемма **10.17** (Эквивалентность Мориты)**.** *Положим $B = \operatorname{End}_A V$. Тогда $\mathbb{\Gamma}^A_n(V) \simeq \mathbb{\Gamma}^B_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Изоморфизмы между $\mathbb{\Gamma}^A_n(V)$ и $\mathbb{\Gamma}^B_n$ получаются посредством сужения тех взаимно-обратных изоморфизмов между $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ и $\mathbb{\Gamma}^B$, что были построены в доказательстве (10.7). Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что образ $\mathbb{\Gamma}^A_n(V)$ содержится в $\mathbb{\Gamma}^B_n$.

Условие $N \in \mathbb{\Gamma}^A_n(V)(R)$ означает, что N как R-модуль имеет постоянный ранг $n \cdot \deg A$. Таким образом, для любой коммутативной R-алгебры L, являющейся полем, A_L-модуль $N \otimes_R L$ имеет ранг n. Следовательно,

$$\dim_L \operatorname{Hom}_{A_L}(V_L, N \otimes_R L) = \operatorname{rk}_{A_L} V_L \cdot \dim_L(N \otimes_R L) = \operatorname{rk}_A V \cdot n = \deg B \cdot n\ ,$$

откуда $\operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, N) \in \mathbb{\Gamma}^B_n(R)$. $\square$

Следствие **10.18.** *Многообразия $\mathbb{\Gamma}^A_n(V)$ геометрически неприводимы, а $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ является из прямой суммой.*

Доказательство. Покажем, что многообразие $\mathbb{\Gamma}^A_n(V)_{\bar F}$ неприводимо, где $\bar F$ — алгебраическое замыкание поля F. Положим $B = \operatorname{End}_A V$. Так как алгебра $B_{\bar F}$ расщеплена, $B_{\bar F} \simeq \operatorname{End}_{\bar F} W$ для некоторого векторного пространства W над $\bar F$. Имеем:

$$\mathbb{\Gamma}^A_n(V)_{\bar F} \simeq (\mathbb{\Gamma}^B_n)_{\bar F} \simeq \mathbb{\Gamma}^{B_{\bar F}}_n \simeq \mathbb{\Gamma}_n(W)\ .$$

Осталось применить (9.15). $\square$

Следствие **10.19.** *В условиях (10.9), предположим, что F-алгебра A является центральной и простой. Пусть H^* — произвольная градуированная геометрическая теория когомологий. В таком случае, для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеется изоморфизм*

$$\mathrm{H}^*\left(\mathbb{\Gamma}^A_n(V)\right) \simeq \coprod_{i=0}^{n} \mathrm{H}^*\left(\mathbb{\Gamma}^A_i(W) \times \mathbb{\Gamma}^A_{n-i}(W')\right)[-i(\operatorname{rk}_A W' - n + i)]\ .$$

Доказательство. Следует из (6.11) и того, что

$$\operatorname{rk}_R \operatorname{Hom}_{A_R}(M, W'_R/M') = \operatorname{rk}_{A_R} M \cdot \operatorname{rk}_{A_R}(W'_R/M') = i \cdot (\operatorname{rk}_A W' - n + i)\ ,$$

если $M \in \mathbb{\Gamma}^A_i(W)(R)$, а $M' \in \mathbb{\Gamma}^A_{n-i}(W')(R)$ (ср. с (9.17). $\square$

Пример **10.20** (Разложение когомологий многообразий Севери-Брауэра).

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{\Gamma}_1^{\mathrm{M}_n(A)}) \simeq \coprod_{i=0}^{n} \mathrm{H}^*(\mathbb{\Gamma}_1^{A})[-i \cdot \deg A]\ .$$

Это разложение было впервые получено в [10].

11.

Многообразия флагов подпространств

Мы возвращаемся к ситуации, имевшей место в §9: V — теперь снова просто конечномерное векторное пространство над полем F.

Определение **11.1.** *Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим подфунктор $\mathbf{\Phi}_m(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}$, называемый многообразием m-флагов (подпространств), следующим образом:*

$$\mathbf{\Phi}_m(V)(R) = \left\{(N_1,\dots,N_m) \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)^{\times m} |\ N_1 \subset \dots \subset N_m\right\}\ .$$

Отметим, что $\mathbf{\Phi}_1(V) = \mathbb{\Gamma}(V)$.

Лемма **11.2.** *Подфунктор m-флагов $\mathbf{\Phi}_m(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}$ является замкнутым (и, тем самым, представляется полным F-многообразием).*

Доказательство. Если $m > 2$, то

$$\mathbf{\Phi}_m(V) = \bigcap_{i=0}^{m-2} \mathbb{\Gamma}(V)^{\times i} \times \mathbf{\Phi}_2(V) \times \mathbb{\Gamma}(V)^{\times(m-2-i)} \quad \subset \mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}\ .$$

Таким образом, достаточно проверить лишь то, что $\mathbf{\Phi}_2(V)$ замкнут в $\mathbb{\Gamma}(V)^{\times 2}$.

Возьмем $N_1, N_2 \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$ для некоторой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и обозначим через s некоторое расщепление эпиморфизма $p\colon V_R \twoheadrightarrow V_R/N_2$. Положим $M = (s \circ p)(N_1) \subset V_R$. Имеем:

$$(N_1, N_2) \in \mathbf{\Phi}_2(V)(R) \ \Leftrightarrow\ N_1 \subset N_2 \ \Leftrightarrow\ M = 0\ .$$

Таким образом,

$$(N_1 \otimes_R S, N_2 \otimes_R S) \in \mathbf{\Phi}_2(V)(S) \ \Leftrightarrow\ \varphi^V(M) = 0$$

для любого гомоморфизма коммутативных F-алгебр $\varphi\colon R \to S$, где $\varphi^V\colon V_R \to V_S$ — отображение, индуцированное φ. Теперь доказательство завершается стандартным образом (см. доказательство (9.7) или (10.2)). $\square$

Предложение **11.3.** *Для любого $m \in \mathbb{N}$, многообразие $\mathbf{\Phi}_m(V)$ является гладким.*

Доказательство. Пусть $U_1 \subset \dots \subset U_m$ и $U'_1 \supset \dots \supset U'_m$ — две цепочки подпространств в V таких что $U'_i \oplus U_i = V$ для каждого i. Рассмотрим эпиморфизмы $p_i\colon V \twoheadrightarrow V/U'_i \simeq U_i$ и открытые подфункторы $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{\Gamma}(V)$, построенные по ним как в доказательстве (9.2). Ясно, что F-функтор $\mathbf{\Phi}_m(V)$ покрывается открытыми подфункторами вида

$$\mathcal{U} = \mathbf{\Phi}_m(V) \cap \prod_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i\ .$$

Покажем, что $\mathcal{U}$ — аффинное пространство.

Для любой $R \in F$-$\mathfrak{alg}$ множество $\prod \mathcal{U}_i(R)$ отождествляется с произведением

$$\prod_{i=1}^{m} \operatorname{Hom}_R \left((U_i)_R, (U'_i)_R\right) .$$

Элемент $(f_i)_{i=1}^m$ этого произведения соответствует элементу из $\mathbf{\Phi}_m(V)(R)$, если и только если такая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc}
(U'_1)_R & \hookleftarrow & (U'_2)_R & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & (U'_m)_R \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_m \\
(U_1)_R & \twoheadleftarrow & (U_2)_R & \twoheadleftarrow & \dots & \twoheadleftarrow & (U_m)_R
\end{array}$$

На этом пути мы получаем структуру R-модуля на множестве $\mathcal{U}(R)$. Более того, $\mathcal{U}(R) \simeq \mathcal{U}(F) \otimes_F R$. Тем самым, $\mathcal{U}$ изоморфно аффинному пространству, построенному по векторному пространству $\mathcal{U}(F)$. $\square$

Предложение **11.4.** Пусть $0 \to W' \to V \to W \to 0$ — точная последовательность векторных пространств над F. Тогда многообразие $\mathbf{\Phi}_m(V)$ является клеточным пространством над $\mathbf{\Phi}_m(W) \times \mathbf{\Phi}_m(W')$.

Доказательство. Рассмотрим произведение грассманианов $\mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}$ как клеточное пространство над $\mathbb{\Gamma}(W)^{\times m} \times \mathbb{\Gamma}(W')^{\times m}$, с помощью произведения (7.2) клеточных структур (9.11). Утверждается, что $\mathbf{\Phi}_m(V) \subset \mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}$ — клеточное подпространство в смысле (7.6). Чтобы понять, что морфизм

$$\operatorname{Gr} \mathbf{\Phi}_m(V) \to \mathbf{\Phi}_m(W) \times \mathbf{\Phi}_m(W')$$

является векторным расслоением, отождествим W с некоторым дополнительным к W' подпространством в V и фиксируем некоторую R-точку

$$(M_1, \dots, M_m; M'_1, \dots, M'_m) \in \Big(\mathbf{\Phi}_m(W) \times \mathbf{\Phi}_m(W')\Big)(R) .$$

Множество R-точек функтора $\operatorname{Gr} \mathbf{\Phi}_m(V)$, лежащих над фиксированной нами точкой, находится во взаимно-однозначном соответствии с элементами $(f_i)_{i=1}^m$ произведения

$$\prod_{j=1}^{m} \operatorname{Hom}_R(M_j, W'_R/M'_j)$$

такими что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc}
M_1 & \hookrightarrow & M_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & M_m \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_m \\
W'_R/M'_1 & \twoheadrightarrow & W'_R/M'_2 & \twoheadrightarrow & \dots & \twoheadrightarrow & W'_R/M'_m
\end{array}$$

Для любого j найдем такой R-модуль M''_j, что $M_{j-1} \oplus M''_j = M_j$. Наше множество является R-модулем, изоморфным произведению

$$\prod_{j=1}^{m} \operatorname{Hom}_R(M''_j, W'_R/M'_j) .$$

$\square$

Следствие **11.5.** Для любого $m \in \mathbb{N}$ в категории соответствий $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм

$$\mathbf{\Phi}_m(V) \simeq \mathbf{\Phi}_m(W) \times \mathbf{\Phi}_m(W') .$$

В частности,

$$\mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}_m(V)\right) \simeq \mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}_m(W) \times \mathbf{\Phi}_m(W')\right)$$

для любой геометрической теории когомологий H. $\square$

Компоненты

Определение **11.6.** Для любой последовательности целых чисел $n_1,\dots,n_m$ пересечение

$$\mathbf{\Phi}_m(V)\cap\prod_{i=1}^m \mathbb{\Gamma}_{n_i}(V) \quad \subset \mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}$$

называется многообразием $(n_1,\dots,n_m)$-флагов и обозначается $\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}(V)$. Конечно, это многообразие непусто лишь если $0\le n_1\le\dots\le n_m\le\dim V$; кроме того, если $n_i=n_{i+1}$ для некоторого i, то

$$\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}(V)=\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_i,n_{i+2},\dots,n_m)}(V)\ .$$

Предложение **11.7.** *Многообразия $\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}(V)$ геометрически неприводимы, а $\mathbf{\Phi}_m(V)$ является их прямой суммой.*

Доказательство. Так как $\mathbb{\Gamma}(V)$ — прямая сумма произведений $\prod\mathbb{\Gamma}_{n_i}(V)$, последнее утверждение предложения в доказательстве не нуждается.

Так как алгебраическая группа $\mathbb{GL}(V)$ действует транзитивно на каждом из $\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}(V)$ (ср. с доказательством (9.15)), эти многообразия геометрически неприводимы. □

Следствие **11.8.** *В условиях (11.4), пусть H^* — произвольная градуированная геометрическая теория когомологий. Для любой последовательности целых чисел $n_1,\dots,n_m$ имеется изоморфизм*

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}(V)\right)\simeq\\ &\simeq\coprod_{i_1,\dots,i_m}\mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}_{(i_1,\dots,i_m)}(W)\times\mathbf{\Phi}_{(n_1-i_1,\dots,n_m-i_m)}(W')\right)\\ &\quad[-i_1(d-n_1+i_1)-(i_2-i_1)(d-n_2+i_2)-\dots-(i_m-i_{m-1})(d-n_m+i_m)]\ ,\end{aligned}$$

где $d=\dim W'$.

Доказательство. Следует из (6.11) и того, что (в обозначениях (11.4))

$$\begin{aligned}&\mathrm{rk}\prod_{j=1}^m\mathrm{Hom}_R(M_j'',W_R'/M_j')=\\ &\quad=i_1(d-n_1+i_1)+(i_2-i_1)(d-n_2+i_2)+\dots+(i_m-i_{m-1})(d-n_m+i_m),\end{aligned}$$

если $(M_j)_{j=1}^m\in\mathbf{\Phi}_{(i_1,\dots,i_m)}(W)(R)$, а $(M_j')_{j=1}^m\in\mathbf{\Phi}_{(n_1-i_1,\dots,n_m-i_m)}(W')(R)$. □

12.

Многообразия флагов идеалов

Пусть теперь A снова произвольная конечномерная F-алгебра; V — конечно-порожденный A-модуль.

Определение **12.1.** Для любого $m\in\mathbb{N}$ положим

$$\mathbf{\Phi}_m^A(V)=\mathbf{\Phi}_m(V)\cap\mathbb{\Gamma}^A(V)^{\times m}\quad\subset\mathbb{\Gamma}(V)^{\times m}\ .$$

В случае $V=A$ условимся применять сокращенное обозначение $\mathbf{\Phi}_m^A$. F-функтор $\mathbf{\Phi}_m^A$ (так же как и его геометрическая реализация) называются многообразиями m-флагов *(*правых*)* идеалов (алгебры A).

Лемма **12.2.** *Пусть A_1 и A_2 — две произвольные конечномерные F-алгебры. Тогда $\mathbf{\Phi}_m^{A_1\times A_2}\simeq\mathbf{\Phi}_m^{A_1}\times\mathbf{\Phi}_m^{A_2}$ для любого $m\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

В дальнейшем мы предполагаем, что алгебра A сепарабельна.

Лемма **12.3** (Эквивалентность Мориты)**.** Положим $B = \operatorname{End}_A V$. Тогда $\mathbf{\Phi}^A_m(V) \simeq \mathbf{\Phi}^B_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В доказательстве (10.7) описаны взаимно-обратные изоморфизмы F-функторов $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ и $\mathbb{\Gamma}^B$. Их сужения и дают взаимно-обратные изоморфизмы F-функторов $\mathbf{\Phi}^A_m(V) \subset \mathbb{\Gamma}^A(V)^{\times m}$ и $\mathbf{\Phi}^B_m \subset (\mathbb{\Gamma}^B)^{\times m}$. $\square$

Следствие **12.4.** Для любого $m \in \mathbb{N}$ многообразие $\mathbf{\Phi}^A_m(V)$ является гладким.

Доказательство. Положим $B = \operatorname{End}_A V$ и пусть $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F. Так как B — сепарабельная F-алгебра, $\bar{F}$-алгебра $B_{\bar{F}}$ изоморфна произведению

$$\operatorname{End}_{\bar{F}} W_1 \times \cdots \times \operatorname{End}_{\bar{F}} W_n$$

с некоторыми векторными $\bar{F}$-пространствами $W_1, \ldots, W_n$. Имеем:

$$\mathbf{\Phi}^A_m(V) \simeq \mathbf{\Phi}^B_m \qquad \text{по (12.3) ;}$$

$$\mathbf{\Phi}^{B_{\bar{F}}}_m \simeq \mathbf{\Phi}^{\operatorname{End} W_1}_m \times \cdots \times \mathbf{\Phi}^{\operatorname{End} W_n}_m \qquad \text{по (12.2) .}$$

Таким образом, многообразие $\mathbf{\Phi}^A_m(V)_{\bar{F}}$ изоморфно гладкому многообразию $\mathbf{\Phi}_m(W_1) \times \cdots \times \mathbf{\Phi}_m(W_n)$. $\square$

Теорема **12.5.** Пусть A — сепарабельная F-алгебра и пусть

$$0 \to W' \to V \to W \to 0$$

— точная последовательность конечно-порожденных A-модулей. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, многообразие $\mathbf{\Phi}^A_m(V)$ является относительным клеточным пространством над $\mathbf{\Phi}^A_m(W) \times \mathbf{\Phi}^A_m(W')$.

Доказательство. Доказательство этого утверждение стандартно — ср. с (10.9) или (11.4). $\square$

Следствие **12.6.** В категории соответствий $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм

$$\mathbf{\Phi}^A_m(V) \simeq \mathbf{\Phi}^A_m(W) \times \mathbf{\Phi}^A_m(W') .$$

В частности,

$$\mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}^A_m(V)\right) \simeq \mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}^A_m(W) \times \mathbf{\Phi}^A_m(W')\right)$$

для любой геометрической теории когомологий H. $\square$

Теорема **12.7.** Для любой сепарабельной алгебры A, в категории $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм $\mathbf{\Phi}^A_m \simeq \mathbf{\Phi}^{A_{\mathrm{an}}}_m$ *(для любого* $m \in \mathbb{N}$*),* где A_{an} — анизотропное ядро *(10.12)* алгебры A. $\square$

Компоненты

Мы произведем вычисление компонент многообразия $\mathbf{\Phi}^A_m(V)$ лишь для случая центральной простой алгебры A. Итак, пусть A — конечномерная центральная простая F-алгебра, а V — конечно-порожденный A-модуль.

Определение **12.8.** Для любой последовательности целых чисел $(n_1,\dots,n_m)$ положим

$$\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V)=\mathbf{\Phi}_m(V)\cap\prod_{i=1}^m\mathbb{\Gamma}^A_{n_i}(V)=\mathbf{\Phi}^A_m(V)\cap\mathbf{\Phi}_{(n_1\deg A,\dots,n_m\deg A)}(V)\ .$$

В случае когда $V=A$ используется сокращенное обозначение $\mathbf{\Phi}^A_m$.

Лемма **12.9** (Эквивалентность Мориты)**.** Положим $B=\mathrm{End}_A V$. Тогда

$$\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V)\simeq\mathbf{\Phi}^B_{(n_1,\dots,n_m)}$$

для любой последовательности целых чисел $(n_1,\dots,n_m)$. □

Следствие **12.10.** Многообразия $\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V)$ геометрически неприводимы, а $\mathbf{\Phi}^A_m(V)$ — их прямая сумма.

Доказательство. Последнее из этих двух утверждений является очевидным. Покажем, что многообразие $\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V)_{\bar F}$ неприводимо, где $\bar F$ — алгебраическое замыкание поля F. Положим $B=\mathrm{End}_A V$. Так как алгебра $B_{\bar F}$ расщеплена, существует такое векторное пространство W над $\bar F$, что $B_{\bar F}\simeq\mathrm{End}_{\bar F}W$. Имеем:

$$\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V)_{\bar F}\simeq\left(\mathbf{\Phi}^B_{(n_1,\dots,n_m)}\right)_{\bar F}\simeq\mathbf{\Phi}^{B_{\bar F}}_{(n_1,\dots,n_m)}\simeq\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}(W)\ .$$

В завершение используем (11.7). □

Следствие **12.11.** В условиях *(12.5),* предположим, что F-алгебра A центральна и проста. Пусть H^* — произвольная градуированная геометрическая теория когомологий. Для любой последовательности целых чисел $(n_1,\dots,n_m)$ имеется изоморфизм

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V)\right)\simeq\\&\simeq\coprod_{i_1,\dots,i_m}\mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}^A_{(i_1,\dots,i_m)}(W)\times\mathbf{\Phi}^A_{(n_1-i_1,\dots,n_m-i_m)}(W')\right)\\&\qquad[-i_1(d-n_1+i_1)-(i_2-i_1)(d-n_2+i_2)-\dots-(i_m-i_{m-1})(d-n_m+i_m)]\ ,\end{aligned}$$

где $d=\mathrm{rk}_A W'$. □

13.

Многообразия изотропных подпространств

Вернемся к рассмотрению ситуации, где V — всего лишь конечномерное F-пространство.

Определение **13.1.** Пусть $h\colon V\times V\to W$ — фиксированное F-билинейное отображение в некоторое конечномерное векторное F-пространство W. Определим подфунктор $\mathbb{\Gamma}(V,h)\subset\mathbb{\Gamma}(V)$ (более точно — тотально) изотропных подпространств следующим образом:

$$\mathbb{\Gamma}(V,h)(R)=\left\{N\in\mathbb{\Gamma}(V)(R)|\ h(N,N)=0\right\}\ .$$

Лемма **13.2.** Подфунктор $\mathbb{\Gamma}(V,h)\subset\mathbb{\Gamma}(V)$ является замкнутым *(*и, следовательно, представим некоторым полным F-многообразием*).*

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{\Gamma}(V)(R)$, $R \in F$-$\mathfrak{alg}$. Положим $M = h(N, N) \subset W_R$. Имеем:

$$N \in \mathbb{\Gamma}(V, h)(R) \quad \Leftrightarrow \quad M = 0 \, .$$

Следовательно, если $\varphi : R \to S$ — какой-либо гомоморфизм F-алгебр, а $\varphi^W : W_R \to W_S$ — индуцированный им гомоморфизм R-модулей, то мы имеем:

$$N \otimes_R S \in \mathbb{\Gamma}(V, h)(S) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^W(M) = 0 \, .$$

Доказательство завершается теперь стандартным образом (ср. с (9.7) или с (10.2)). □

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что характеристика поля F отлична от 2.

Предположим, что билинейная форма h на пространстве V является:

- невырожденной и
- симметрической или кососимметрической.

Предложение **13.3.** *При сделанных предположениях многообразие $\mathbb{\Gamma}(V, h)$ является гладким.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbb{\Gamma}(V, h)_{\bar{F}}$ регулярно, где $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F. Так как $\mathbb{\Gamma}(V, h)_{\bar{F}} \simeq \mathbb{\Gamma}(V_{\bar{F}}, h_{\bar{F}})$, можно просто предположить, что само поле F алгебраически замкнуто. В условиях этого предположения мы сейчас построим покрытие интересующего нас многообразия открытыми подмногообразиями, изоморфными аффинным пространствам.

Для любого векторного F-пространства U гиперболическая плоскость на U, обозначаемая $\mathbb{H}(U)$, определяется как прямая сумма $U \oplus U^*$ пространства U и его двойственного пространства $U^* = \mathrm{Hom}_F(U, F)$, на которой вводится симметрическая или кососимметрическая (в зависимости от контекста) билинейная форма, заданная условием: $(U, U) = 0 = (U^*, U^*)$ и $(u^*, u) = u^*(u)$ для любых $u^* \in U^*$, $u \in U$.

Для каждого ортогонального разложения пространства V, имеющего вид

$$V \simeq \mathbb{H}(U) \perp W \, ,$$

рассмотрим проекцию $p : V \twoheadrightarrow U$ и соответствующий ей открытый подфунктор $\mathcal{U} \subset \mathbb{\Gamma}(V)$ (см. доказательство (9.2)).

Лемма **13.4.** *Подфункторы $\mathcal{U} \cap \mathbb{\Gamma}(V, h)$ покрывают $\mathbb{\Gamma}(V, h)$.*

Доказательство. Так как поле F алгебраически замкнуто, достаточно лишь проверить, что покрытие происходит на уровне F-точек. Для любого $U \in \mathbb{\Gamma}(V, h)(F)$ имеется некоторое разложение $V \simeq \mathbb{H}(U) \perp W$. Если $\mathcal{U}$ — соответствующий ему открытый подфунктор, то $U \in \mathcal{U}(F)$. □

Лемма **13.5.** *Многообразие $\mathcal{U} \cap \mathbb{\Gamma}(V, h)$ изоморфно аффинному пространству (предположение о том, что поле F алгебраически замкнуто, здесь излишне).*

Доказательство. Мы уже знаем, что само многообразие $\mathcal{U}$ является аффинным пространством (см. доказательство (9.2)). А именно, для любой $R \in F$-$\mathfrak{alg}$ мы отождествляем множество $\mathcal{U}(R)$ с

$$\mathrm{Hom}_R(U_R, U_R^* \oplus W_R) = \mathrm{Bil}(U_R) \oplus \mathrm{Hom}_R(U_R, W_R) \, ,$$

где $\mathrm{Bil}(U_R)$ обозначает R-модуль R-билинейных форм на U_R. Пара

$$\Big(b \in \mathrm{Bil}(U_R),\ f \in \mathrm{Hom}_R(U_R, W_R)\Big)$$

соответствует элементу из $\mathbb{I}\Gamma(V,h)(R)$, если и только если подмодуль

$$\big\{u + b(u,\cdot) + f(u) |\ u \in U\big\} \ \subset U \oplus U^* \oplus W = V$$

является тотально изотропным, т.е. для любых $u_1, u_2 \in U$ скалярное произведение

$$h\Big(u_1 + b(u_1,\cdot) + f(u_1),\ u_2 + b(u_2,\cdot) + f(u_2)\Big) =$$
$$= b(u_1,u_2) + \lambda b(u_2,u_1) + h\big(f(u_1), f(u_2)\big) \tag{$*$}$$

равно нулю, где $\lambda = 1$ (соотв., $\lambda = -1$) в симметрическом (соотв., кососимметрическом) случае.

Отметим, что поскольку $\operatorname{char} F \neq 2$, R-модуль $\mathrm{Bil}(U_R)$ разлагается в прямую сумму $\mathrm{Bil}^1(U_R) \oplus \mathrm{Bil}^{-1}(U_R)$ подмодуля симметрических форм и подмодуля кососимметрических форм: для любой формы $b \in \mathrm{Bil}(U_R)$ ее симметрическая и кососимметрическая компоненты — это

$$(x,y) \mapsto \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} \quad \text{и} \quad (x,y) \mapsto \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2}\ .$$

Благодаря условию $(*) = 0$, λ-симметрическая компонента формы b однозначно определяется гомоморфизмом f. При этом на выбор $(-\lambda)$-симметрической компоненты нет вообще никаких ограничений. Таким образом, для любой алгебры R, мы получаем биекцию

$$\big(\mathcal{U} \cap \mathbb{I}\Gamma(V,h)\big)(R) \simeq \mathrm{Bil}^{-\lambda}(U_R) \oplus \mathrm{Hom}(U_R, W_R)\ ,$$

которая и дает желаемый изоморфизм с аффинным пространством (заметим, что $\mathcal{U} \cap \mathbb{I}\Gamma(V,h)$ не является (вообще говоря) линейным подпространством аффинного пространства $\mathcal{U}$). □

На этой лемме завершается доказательство предложения. □

В этом § мы не занимаемся построением клеточной структуры, поскольку она будет получена сразу в более общей ситуации в §15.

Компоненты

Определение **13.6.** Для любого $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathbb{I}\Gamma_n(V,h) = \mathbb{I}\Gamma(V,h) \cap \mathbb{I}\Gamma_n(V) \quad \subset \mathbb{I}\Gamma(V)$$

(конечно же, $\mathbb{I}\Gamma_n(V,h)$ непусто, лишь если $0 \leq n \leq \dim V/2$).

Предложение **13.7.** *Все многообразия $\mathbb{I}\Gamma_n(V,h)$ геометрически неприводимы за исключением многообразия с $n = \dim V/2$ в симметрическом случае; $\mathbb{I}\Gamma(V,h)$ — прямая сумма всех этих многообразий. В исключительном случае многообразие $\mathbb{I}\Gamma_n(V,h)$ либо неприводимо, либо состоит из двух изоморфных (геометрически неприводимых) компонент.*

Доказательство. Положим $G = \mathbb{SO}(V,h)$ для симметрического случае и $G = \mathbb{S}\mathrm{p}(V,h)$ для кососимметрического. Аффинная алгебраическая группа G неприводима. Если не рассматривать исключительный случай, ее действие на $\mathbb{\Gamma}_n(V,h)$ транзитивно. Следовательно, многообразие $\mathbb{\Gamma}_n(V,h)$ абсолютно неприводимо.

В исключительном случае имеется транзитивное действие алгебраической группы $\mathbb{O}(V,h)$ на $\mathbb{\Gamma}_n(V,h)$. Так как $\mathbb{SO}(V,h)$ является компонентой группы $\mathbb{O}(V,h)$, причем $[\mathbb{O}(V,h) : \mathbb{SO}(V,h)] = 2$, мы получаем утверждение предложения об исключительном случае. □

14.

Инволюции и эрмитовы формы

Пусть A — некоторое кольцо. Инволюция на A — это анти-автоморфизм A порядка ≤ 2.

Изоморфизм колец с инволюциями — это изоморфизм колец, коммутирующий с инволюциями.

Для двух колец с инволюциями (A_1,σ_1) и (A_2,σ_2), их произведение $(A_1,\sigma_1)\times(A_2,\sigma_2)$ определено как кольцо $A_1 \times A_2$ с инволюцией $\sigma_1 \times \sigma_2$.

Пусть σ — инволюция на A, и предположим, что кольцо A является полупростым [4, def. 24.5]. Так как σ действует на множестве простых компонент кольца A, каждая компонента либо инвариантна либо переставляется с некоторой другой. Таким образом, кольцо с инволюцией (A,σ) изоморфно произведению (уже неразложимых) сомножителей следующих двух типов:

- простое кольцо [4, def. 25.14] с инволюцией;
- $B \times B^{\mathrm{op}}$, где B — простое кольцо, а B^{op} — его двойственное кольцо, с так называемой инволюцией перестановки сомножителей τ:
$$\tau(b, b^{\mathrm{op}}) = \tau(b^{\mathrm{op}}, b) \ \text{ для } b \in B,\ b^{\mathrm{op}} \in B^{\mathrm{op}}.$$

Пусть (A,σ) — кольцо с инволюцией и пусть V', V — некоторые A-модули. Полуторалинейное отображение h на $V' \times V$ — это биаддитивное отображение $h\colon V' \times V \to A$ такое что
$$h(v'a', va) = \sigma(a') \cdot h(a', a) \cdot a \ \text{ для любых } v' \in V',\ v \in V,\ a', a \in A.$$
Множество полуторалинейных отображений на $V' \times V$ обозначается через $\mathrm{Sesq}(V', V)$. Оно является модулем над кольцом σ-инвариантных элементов центра кольца A, изоморфным с $\mathrm{Hom}_A(V', V^*)$, где $V^* = \mathrm{Hom}_A(V, A)$ рассматривается как правый A-модуль (при помощи инволюции).

В случае $V' = V$, мы получаем понятие полуторалинейной формы на V. Множество полуторалинейных форм на V договоримся обозначать просто $\mathrm{Sesq}(V)$.

Если h — полуторалинейная форма на V, то форма σh, определенная формулой
$$(\sigma h)(v', v) = \sigma\big(h(v, v')\big) ,$$
— тоже полуторалинейна на V. Положим $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$. Полуторалинейная форма h на V называется λ-эрмитовой, если $h = \lambda \cdot (\sigma h)$; в отношении 1-эрмитовых форм употребляется также термин эрмитовы, а в отношении (-1)-эрмитовых — косоэрмитовы. Множество всех λ-эрмитовых форм на V обозначается $\mathrm{Herm}^{\lambda}(V)$; оно является модулем над кольцом σ-инвариантных элементов центра кольца A.

Пример **14.1.** Для $V = A$ положим $h(a', a) = \sigma(a') \cdot a$ для любых $a', a \in A$. Тогда h — эрмитова форма на V.

Пример **14.2** (Гиперболическое пространство)**.** Пусть (A, σ) — кольцо с инволюцией, U — некоторый A-модуль, $\lambda = \pm 1$. Мы обозначаем через $\mathbb{H}^\lambda(U)$ или попросту $\mathbb{H}(U)$ — λ-эрмитово гиперболическое пространство на U, т.е. прямую сумму модулей $U \oplus U^*$ с λ-эрмитовой формой $\mathbb{h}$ на ней, определенную условиями

$$\mathbb{h}(U, U) = 0 = \mathbb{h}(U^*, U^*) \text{ и } \mathbb{h}(u^*, u) = u^*(u) \text{ для любых } u^* \in U^*,\ u \in U.$$

Если $U = U_1 \oplus U_2$, то $\mathbb{H}(U) = \mathbb{H}(U_1) \perp \mathbb{H}(U_2)$.

Предположим, что $2 \in A^\times$. Произвольная форма $h \in \operatorname{Sesq}(V)$ раскладывается в сумму

$$h = \frac{h + \sigma h}{2} + \frac{h - \sigma h}{2}\ .$$

Первое (соотв., второе) слагаемое является эрмитовой (соотв., косоэрмитовой) формой на V и называется эрмитовой (соотв., косоэрмитовой) компонентой формы h. Так как форма, одновременно являющаяся и эрмитовой, и косоэрмитовой, равна 0, мы получаем разложение в прямую сумму (модулей над кольцом σ-инвариантных элементов центра кольца A)

$$\operatorname{Sesq}(V) = \operatorname{Herm}^1(V) \oplus \operatorname{Herm}^{-1}(V)\ .$$

Произвольная λ-эрмитова форма V называется невырожденной, если индуцированный гомоморфизм A-модулей $\hat{h} : V \to V^*$ является изоморфизмом. В этом случае существует единственная инволюция σ_h кольца $\operatorname{End}_A V$, удовлетворяющая условию

$$h\big(v', f(v)\big) = h\big(\sigma_h(f)(v'), v\big) \text{ для любых } v', v \in V,\ f \in \operatorname{End}_A V.$$

Она называется присоединенной (к h) инволюцией и строится напрямую как

$$\sigma_h(f) = \hat{h}^{-1} \circ f^* \circ \hat{h} \quad \text{для любых } f \in \operatorname{End}_A V,$$

где f^* — это эндоморфизм модуля V^*, индуцированный f.

Предложение **14.3** ([18, chap. 7, cor. 9.2])**.** *Пусть A — тело с инволюцией, V — конечномерное векторное A-пространство, а h — невырожденная λ-эрмитова форма на V. Существует ортогональное разложение*

$$(V, h) = \mathbb{H}(U) \perp (W, h)$$

с анизотропным $W \subset V$ (более того, U и (W, h) определены однозначно с точностью до изоморфизма).

Сосредоточим теперь наше внимание на случае, когда кольцо A наделено структурой конечномерной алгебры над некоторым полем F с $\operatorname{char} F \neq 2$. Под инволюцией на A мы будем подразумевать F-линейную, или, иначе говоря, тривиальную на F инволюцию кольца A.

Лемма **14.4** ([18, chap.8, дискуссия за thm. 7.4])**.** *Предположим, что F-алгебра A проста, а V — конечно-порожденный A-модуль. Каждая инволюция F-алгебры $\operatorname{End}_A V$ является присоединенной по отношению к некоторой инволюции на A и некоторой невырожденной λ-эрмитовой форме на V.*

Определение **14.5.** Для произвольной полупростой F-алгебры с инволюцией (A,σ) мы определим новую F-алгебру с инволюцией $(A,\sigma)_{\mathrm{an}}$, которую будем называть анизотропным ядром для (A,σ), по следующим правилам:

- если (A,σ) разложима, то $(A,\sigma)_{\mathrm{an}}$ является произведением анизотропных ядер неразложимых компонент;
- если
$$(A,\sigma)\simeq\big(\mathrm{M}_n(D)\times\mathrm{M}_n(D)^{\mathrm{op}},\text{перестановка сомножителей}\big)\ ,$$
где D — алгебра с делением, мы положим
$$(A,\sigma)_{\mathrm{an}}=(D\times D^{\mathrm{op}},\text{перестановка сомножителей})^{\times n}\ ;$$
- пусть D — F-алгебра с делением, снабженная инволюцией, V — векторное пространство над D, снабженное λ-эрмитовой формой h и пусть
$$(V,h)=\mathbb{H}(U)\perp(W,h)$$
— такое разложение как в (14.3); если $A\simeq\operatorname{End}_D V$, а σ — присоединенная инволюция, то
$$(A,\sigma)_{\mathrm{an}}=(D\times D^{\mathrm{op}},\text{перестановка сомножителей})^{\times\dim_D U}\times(\operatorname{End}_D W,\sigma)\ .$$

Анизотропное ядро полупростой F-алгебры с инволюцией является полупростой F-алгеброй с инволюцией и определено с точностью до изоморфизма.

Замечание **14.6.** Анизотропное ядро может быть определено и несколько более инвариантным образом. Для этого следует доказать (14.3) для более общей ситуации — для полупростой F-алгебры A и применить полученное утверждение к $V=A$ и h такой как в (14.1), что приведет к разложению
$$V=\mathbb{H}(U_1)\perp\dots\perp\mathbb{H}(U_n)\perp W$$
с анизотропным W и простыми $U_1,\dots,U_n$. Анизотропным ядром для (A,σ) будет тогда алгебра
$$\operatorname{End}_A U_1\times(\operatorname{End}_A U_1)^{\mathrm{op}}\times\dots\times\operatorname{End}_A U_n\times(\operatorname{End}_A U_n)^{\mathrm{op}}\times\operatorname{End}_A W$$
с сужением σ в роли инволюции.

15.

Многообразия изотропных идеалов

Определение **15.1.** Для конечномерной F-алгебры A с инволюцией σ и конечно-порожденного A-модуля V с λ-эрмитовой формой h, определим
$$\mathbb{\Gamma}^A(V,h)=\mathbb{\Gamma}^A(V)\cap\mathbb{\Gamma}(V,h)\quad\subset\mathbb{\Gamma}(V)\ .$$
В случае, где $V=A$, а h — как в (14.1), мы используем для $\mathbb{\Gamma}^A(V,h)$ обозначение $\mathbb{\Gamma}^{A,\sigma}$ и называем это многообразием *(*правых*)* *(*тотально*)* изотропных идеалов алгебры с инволюцией (A,σ).

Лемма **15.2.** *Для двух конечномерных F-алгебр с инволюциями (A_1,σ_1) и (A_2,σ_2) справедливо: $\mathbb{\Gamma}^{A_1\times A_2,\sigma_1\times\sigma_2}\simeq\mathbb{\Gamma}^{A_1,\sigma_1}\times\mathbb{\Gamma}^{A_2,\sigma_2}$.* $\square$

Определение **15.3.** Для правого (соотв., левого) идеала $I\subset A$ произвольного кольца A мы обозначаем через $\operatorname{Ann} I$ его левый (соотв., правый) аннулятор. Это левый (соотв., правый) идеал кольца A.

Лемма **15.4.** *Пусть A — обобщенная алгебра Адзумаи (над некоторым коммутативным кольцом R), $I \subset A$ — односторонний (правый или левый) идеал, являющийся прямым слагаемым в A. Тогда:*

- *$\operatorname{Ann} I$ тоже является прямым слагаемым в A;*
- *$\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} I = I$.*

Доказательство. Так как левый идеал в A является правым в A^{op}, достаточно рассмотреть лишь случай правого идеала I.

Отождествим A с $\operatorname{End}_A A$. Правый идеал I отождествляется при этом с $\operatorname{Hom}_A(A, I)$. Поэтому $\operatorname{Ann} I = \operatorname{Hom}_A(A/I, A)$ и становится ясным, что $\operatorname{Ann} I$ — прямое слагаемое в A, если I - прямое слагаемое.

Предположим, что R — поле. Используя полученное отождествление, мы можем посчитать размерности и убедиться, что $\dim_R I + \dim_R \operatorname{Ann} I = \dim_R A$.

Для произвольного R мы очевидно имеем включение $I \subset \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} I$. По только что выведенной формуле для размерностей, для любого гомоморфизма кольца R в какое-нибудь поле L выполнено $(\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} I/I) \otimes L = 0$. Значит, $I = \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} I$ (отметим, что $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} I$, будучи прямым слагаемым в A, конечно-порожден). $\square$

Лемма **15.5.** *Пусть A — сепарабельная F-алгебра. Положим $B = A \times A^{\mathrm{op}}$ и пусть τ — инволюция перестановки сомножителей на B. Тогда $\mathbb{\Gamma}^{B,\tau} \simeq \mathbf{\Phi}_2^A$.*

Доказательство. Возьмем любую $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$. Произвольный правый идеал в $B_R = A_R \times A_R^{\mathrm{op}}$ раскладывается в произведение $I \times I'$, где I — правый, а I' — левый идеал в A_R. Идеал $I \times I'$ является тотально изотропным, если и только если $I' \cdot I = 0$, т.е. $I \subset \operatorname{Ann} I'$. Так как $\operatorname{Ann} I'$ — прямое слагаемое в A_R по предыдущей лемме, мы получаем отображение

$$I \times I' \in \mathbb{\Gamma}^{B,\tau}(R) \;\;\mapsto\;\; (I, \operatorname{Ann} I') \in \mathbf{\Phi}_2^A(R)\ ,$$

задающее морфизм F-функторов. Обратный морфизм задается отображением

$$(I \subset J) \in \mathbf{\Phi}_2^A(R) \;\;\mapsto\;\; I \times \operatorname{Ann} J \in \mathbb{\Gamma}^{B,\tau}(R)$$

и действительно является обратным в силу предыдущей леммы. $\square$

Начиная с этого места (и до конца §), мы зафиксируем некоторую сепарабельную алгебру A с инволюцией σ и некоторый конечно-порожденный A-модуль V с невырожденной λ-эрмитовой формой h (где $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$).

Лемма **15.6** (Эквивалентность Мориты)**.** *Положим $B = \operatorname{End}_A V$ и пусть τ — присоединенная инволюция на B. Тогда $\mathbb{\Gamma}^A(V, h) \simeq \mathbb{\Gamma}^{B,\tau}$.*

Доказательство. По определению τ мы имеем:

$$h\big(v,\ f(v')\big) = h\big(\tau(f)(v),\ v'\big)$$

для любых $v, v' \in V$ и $f \in B$. Для произвольной $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ рассмотрим отображение, возникающее из теории Мориты (см. доказательство (10.7))

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{\Gamma}^A(V)(R) & \to & \mathbb{\Gamma}^B(R) \\ N & \mapsto & \operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, N)\ . \end{array}$$

Предположим, что N тотально изотропен. Хотелось бы увидеть, что его образ также тотально изотропен. Возьмем любые $f, f' \in \operatorname{Hom}_{A_R}(V_R, N)$. Имеем:

$$0 = h\Big(f(v), f'(v')\Big) = h\Big(\big(\tau(f') \circ f\big)(v),\ v'\Big) \text{ для любых } v, v' \in V_R\ .$$

Так как h невырождена, получается, что $\big(\tau(f') \circ f\big)(v) = 0$ для любых $v \in V_R$, т.е. $\tau(f') \circ f = 0 \in B_R$. Таким образом, образ N действительно тотально изотропный идеал в B_R.

Так как обратное отображение

$$\mathbb{\Gamma}^A(V)(R) \leftarrow \mathbb{\Gamma}^B(R)$$

определено аналогичным образом (см. доказательство (10.7)), подобная же проверка показывает, что и оно сохраняет свойство тотальной изотропности. Мы получили взаимно-обратные изоморфизмы между $\mathbb{\Gamma}^A(V,h)$ и $\mathbb{\Gamma}^{B,\tau}$. $\square$

Следствие **15.7.** Многообразие $\mathbb{\Gamma}^A(V,h)$ является гладким.

Доказательство. Достаточно осуществить проверку лишь для многообразия $\mathbb{\Gamma}^{A,\sigma}$ (15.6), предполагая, причем, что F алгебраически замкнуто, а (A,σ) — неразложима (15.2). Тогда найдется векторное F-пространство W такое что либо $A \simeq \operatorname{End}_F W$, либо $A \simeq \operatorname{End} W \times \operatorname{End} W^*$, причем во втором случае σ — инволюция перестановки сомножителей.

Рассмотрим первый случай. В зависимости от типа σ, найдется симметрическая или кососимметрическая невырожденная билинейная форма h на W такая что σ является присоединенной инволюцией относительно h (и тождественной инволюции на F). Тогда многообразие $\mathbb{\Gamma}^{A,\sigma}$ изоморфно многообразию $\mathbb{\Gamma}(W,h)$ по (15.6), которое гладко по (13.3).

Во втором случае $\mathbb{\Gamma}^{A,\sigma}$ изоморфно многообразию $\mathbf{\Phi}_2(W)$ по (15.5), которое гладко по (11.3). $\square$

Теорема **15.8.** Пусть A — сепарабельная F-алгебра с инволюцией, V — конечно-порожденный A-модуль с невырожденной λ-эрмитовой формой h и ортогональным разложением

$$V = \mathbb{H}(U) \perp W\ .$$

Многообразие $\mathbb{\Gamma}^A(V,h)$ является относительным клеточным пространством над $\mathbf{\Phi}_2^A(U) \times \mathbb{\Gamma}^A(W,h)$.

Доказательство. Используя разложение A-модуля $V = U \oplus U^* \oplus W$, мы получаем относительную структуру на $\mathbb{\Gamma}^A(V)$ над $\mathbb{\Gamma}^A(U) \times \mathbb{\Gamma}^A(U^*) \times \mathbb{\Gamma}^A(W)$ как в (10.14). Суживая морфизм

$$\operatorname{Gr} \mathbb{\Gamma}^A(V) \to \mathbb{\Gamma}^A(U) \times \mathbb{\Gamma}^A(U^*) \times \mathbb{\Gamma}^A(W)$$

на $\operatorname{Gr} \mathbb{\Gamma}^A(V,h) = \mathbb{\Gamma}^A(V,h) \cap \operatorname{Gr} \mathbb{\Gamma}^A(V)$, мы получаем морфизм в $\mathbf{\Phi}_2^A(U) \times \mathbb{\Gamma}^A(W,h)$. Действительно, пусть $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$ и пусть

$$(N_1, (U_R/N_2)^*, N_3) \in \Big(\mathbb{\Gamma}^A(U) \times \mathbb{\Gamma}^A(U^*) \times \mathbb{\Gamma}^A(W)\Big)(R)$$

— образ некоторого $N \in \operatorname{Gr} \mathbb{\Gamma}^A(V)(R)$. Если N тотально изотропен, то N_3 — тоже тотально изотропен; подмодуль $N_1 \oplus (U_R/N_2)^*$ при этом тоже тотально изотропен, т.е. $N_1 \subset N_2$.

Теперь наделим только что построенный морфизм

$$\mathrm{Gr}\,\mathbb{\Gamma}^A(V,h) \to \mathbf{\Phi}_2^A(U) \times \mathbb{\Gamma}^A(W,h)$$

структурой векторного расслоения. Зафиксируем $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$, $(N_1, N_2) \in \mathbf{\Phi}_2^A(U)(R)$, $N_3 \in \mathbb{\Gamma}^A(W,h)(R)$, расщепление вложения $N_2 \hookrightarrow U_R$ и такой A_R-модуль N_3', что $N_3 \oplus N_3' = W$. Элементы $N \in \mathrm{Gr}\,\mathbb{\Gamma}^A(V,h)(R)$, лежащие над зафиксированной R-точкой, находятся во взаимно-однозначном соответствии с

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A_R}(N_1, N_2^*) \oplus \mathrm{Hom}_{A_R}(N_1, N_3') \oplus \mathrm{Hom}(N_3, N_2^*) =\\ = \mathrm{Sesq}(N_1, N_2) \oplus \mathrm{Hom}_{A_R}(N_1, N_3') \oplus \mathrm{Sesq}(N_3, N_2)\end{aligned}$$

(ср. с (10.14)). Элемент $h_{12} \oplus f_{13} \oplus h_{32}$ последнего множества находится в соответствии с

$$\begin{aligned}N = \big\{n_1 + n_2^* + h_{12}(n_1,\cdot) + h_{32}(n_3,\cdot) + n_3 + f_{13}(n_1) \in V_R |\\ n_1 \in N_1, n_2^* \in (U_R/N_2)^*, n_3 \in N_3\big\}\ .\end{aligned}$$

Сосчитаем эрмитово произведение двух произвольных элементов такого N:

$$\begin{aligned}h\Big(n_1 + n_2^* + h_{12}(n_1,\cdot) + h_{32}(n_3,\cdot) + n_3 + f_{13}(n_1),\\ m_1 + m_2^* + h_{12}(m_1,\cdot) + h_{32}(m_3,\cdot) + m_3 + f_{13}(m_1)\Big) =\end{aligned}$$

$$(*)\qquad \begin{aligned}=h_{12}(n_1,m_1) + \lambda\sigma\big(h_{12}(m_1,n_1)\big) + h_{32}(n_3,m_1) + \lambda\sigma\big(h_{32})(m_3,n_1)\big) +\\ + h\big(n_3, f_{13}(m_1)\big) + \lambda\sigma\Big(h\big(m_3, f_{13}(n_1)\big)\Big) + h\big(f_{13}(n_1), f_{13}(m_1)\big)\ ,\end{aligned}$$

где $n_1, m_1 \in N_1$, $n_2^*, m_2^* \in (U_R/N_2)^*$, $n_3, m_3 \in N_3$.

Предположим, что $(*) = 0$ для любых n_1, n_3, m_1, m_3. Положив $n_3 = 0 = m_3$, мы получаем условие

(i)
$$h_{12}(n_1,m_1) + \lambda\sigma\big(h_{12}(m_1,n_1)\big) = -h\big(f_{13}(n_1), f_{13}(m_1)\big) \text{ для любых } n_1, m_1 \in N_1\ .$$

Поэтому оставшаяся часть выражения $(*)$

$$h_{32}(n_3,m_1) + \lambda\sigma\big(h_{32}(m_3,n_1)\big) + h\big(n_3, f_{13}(m_1)\big) + \lambda\sigma\Big(h\big(m_3, f_{13}(n_1)\big)\Big)$$

тоже равна нулю. Положив $m_3 = 0 = n_1$, мы получаем условие

(ii) $\qquad h_{32}(n_3,m_1) = -h\big(n_3, f_{13}(m_1)\big)$ для любых $n_3 \in N_3$ и $m_1 \in N_1$

Наоборот, условия (i) и (ii) вместе дают $(*)$.

Условие (ii) означает, что сужение отображения $h_{32} \in \mathrm{Sesq}(N_3, N_2)$ на $N_3 \times N_1$ однозначно задается посредством f_{13}. Условие (i) означает, что λ-эрмитова компонента сужения полуторалинейного отображения $h_{12} \in \mathrm{Sesq}(N_1, N_2)$ на подмножество $N_1 \times N_1$ тоже однозначно задается посредством f_{13}. Таким образом, мы получили биекцию со следующим множеством:

$$\mathrm{Sesq}(N_1, N_1') \oplus \mathrm{Herm}^{-\lambda}(N_1) \oplus \mathrm{Hom}_{A_R}(N_1, N_3') \oplus \mathrm{Sesq}(N_3, N_1')\ ,$$

где N_1' — некоторый фиксированный A_R-модуль такой что $N_2 = N_1 \oplus N_1'$. Это и задает структуру векторного расслоения, ведь выписанная сумма является конечно-порожденным проективным R-модулем, согласованным с тензорным домножением на коммутативные R-алгебры. $\square$

Следствие **15.9.** *В категории соответствий $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм*

$$\mathbb{I}\Gamma^A(V,h) \simeq \mathbf{\Phi}_2^A(U) \times \mathbb{I}\Gamma^A(W,h)\ .$$

В частности,

$$\mathrm{H}\left(\mathbb{I}\Gamma^A(V)\right) \simeq \mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}_2^A(U) \times \mathbb{I}\Gamma^A(W,h)\right)$$

для любой геометрической теории когомологий H. $\square$

Теорема **15.10.** *Для любой сепарабельной алгебры A с инволюцией σ в категории $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм $\mathbb{I}\Gamma^{A,\sigma} \simeq \mathbb{I}\Gamma^{(A,\sigma)_{\mathrm{an}}}$, где $(A,\sigma)_{\mathrm{an}}$ — анизотропное ядро (14.5).* $\square$

Компоненты

Пусть A — центральная простая F-алгебра, снабженная инволюцией σ (называемой литературе инволюцией первого вида). Положим

$$t = \begin{cases} 1\ , & \text{если инволюция } \sigma \text{ ортогональна;} \\ -1\ , & \text{если } \sigma \text{ симплектическая.} \end{cases}$$

Как и прежде, V — конечно-порожденный A-модуль, снабженный невырожденной λ-эрмитовой формой h (где $\lambda = \pm 1$).

Определение **15.11.** Для любого $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathbb{I}\Gamma_n^A(V,h) = \mathbb{I}\Gamma^A(V,h) \cap \mathbb{I}\Gamma_n^A(V) \quad \subset \mathbb{I}\Gamma^A(V)\ .$$

Аналогично мы определяем F-функторы $\mathbb{I}\Gamma_n^{A,\sigma}$. Многообразия $\mathbb{I}\Gamma_1^{A,\sigma}$ в ортогональном случае были названы инволюционными многообразиями и исследованы в [21].

Лемма **15.12** (Эквивалентность Мориты)**.** *Положим $B = \mathrm{End}_A V$ и пусть τ — присоединенная инволюция на B. Тогда $\mathbb{I}\Gamma_n^A(V,h) \simeq \mathbb{I}\Gamma_n^{B,\tau}$.*

Доказательство. Воспользовавшись (10.7), отождествим $\mathbb{I}\Gamma^A(V)$ с $\mathbb{I}\Gamma^B$. Согласно (10.17), подфунктор $\mathbb{I}\Gamma_n^A(V)$ отождествляется при этом с $\mathbb{I}\Gamma_n^B$, а ввиду (15.6), подфунктор $\mathbb{I}\Gamma^A(V,h)$ отождествляется с $\mathbb{I}\Gamma^{B,\tau}$. Так что пересечение первого и третьего подфункторов отождествляется с пересечением второго и четвертого. $\square$

Следствие **15.13.** *Все многообразия $\mathbb{I}\Gamma_n^A(V,h)$ геометрически неприводимы за исключением того случая, где $t\lambda = 1$ и $n = \mathrm{rk}_A V/2$; $\mathbb{I}\Gamma^A(V,h)$ является прямой суммой этих многообразий. В исключительном случае многообразие $\mathbb{I}\Gamma_n^A(V,h)$ либо неприводимо, либо состоит из двух изоморфных (геометрически неприводимых) компонент.*

Доказательство. Утверждение о прямой сумме не требует доказательства. Докажем остальное.

По только что доказанной лемме достаточно разобраться лишь с многообразием $\mathbb{I}\Gamma_n^{B,\tau}$. Мы также имеем право предположить, что поле F алгебраически замкнуто. Тогда $B \simeq \operatorname{End}_F W$ для некоторого векторного F-пространства W, при этом заданная инволюция на $\operatorname{End}_F W$ является присоединенной относительно некоторой $t\lambda$-симметрической невырожденной билинейной формы h на W. В таком случае, $\mathbb{I}\Gamma_n^{B,\tau} \simeq \mathbb{I}\Gamma_n(W,h)$ по (15.12). Многообразие $\mathbb{I}\Gamma_n(W,h)$ либо неприводимо либо состоит из двух (геометрически неприводимых) компонент по (13.7). □

Следствие **15.14.** В условиях *(15.8),* предположим, что F-алгебра A является центральной простой, а инволюция σ имеет тип t. Пусть H^* — произвольная градуированная геометрическая теория когомологий. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеется изоморфизм

$$\mathrm{H}^*\left(\mathbb{I}\Gamma_n^A(V,h)\right) \simeq \coprod_{i+(\operatorname{rk} U-j)+k=n} \mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}_{(i,j)}^A(U) \times \mathbb{I}\Gamma_k^A(W,h)\right)[-r_{ijk}]\,,$$

где $r_{ijk} = i(j-i) + i(i-t\lambda)/2 + i(\operatorname{rk}_A W - k) + k(j-i)$.

Доказательство. Нужно лишь проверить, что верно выписаны индексы сдвига r_{ijk}. В обозначениях доказательства (15.8) предположим, что

$$(N_1, N_2) \in \mathbf{\Phi}_{(i,j)}^A(U)(R) \quad \text{и} \quad N_3 \in \mathbb{I}\Gamma_k^A(W,h)(R)\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r_{ijk} = &\operatorname{rk}_R \operatorname{Sesq}(N_1, N_1') + \operatorname{rk}_R \operatorname{Herm}^{-\lambda}(N_1) + \\ &+ \operatorname{rk}_R \operatorname{Hom}_{A_R}(N_1, N_3') + \operatorname{rk}_R \operatorname{Sesq}(N_3, N_1')\,. \end{aligned}$$

Вычисляя эти ранги, можно считать, что R — поле. Во избежании дополнительных обозначений, предположим попросту, что $R = F$.

Лемма **15.15.** Пусть A — центральная простая F-алгебра с инволюцией типа t, а N' и N — конечно-порожденные A-модули. Тогда

(i) $$\dim_F \operatorname{Sesq}(N', N) = \operatorname{rk}_A N' \cdot \operatorname{rk}_A N\,;$$

(ii) $$\dim_F \operatorname{Herm}^\lambda(N) = \frac{1}{2} \operatorname{rk}_A N(\operatorname{rk}_A N + t\lambda)\,.$$

Доказательство. Как уже было подмечено ранее,

$$\dim_F \operatorname{Hom}_A(N', N) = \operatorname{rk}_A N' \cdot \operatorname{rk}_A N\,.$$

Так как $\operatorname{Sesq}(N', N) \simeq \operatorname{Hom}_A(N', N^*)$, равенство (i) в доказательстве не нуждается.

Что касается равенства (ii), оно очевидно выполняется для $N = A$, ведь F-пространство $\operatorname{Herm}^\lambda(A)$ изоморфно пространству λ-симметрических элементов алгебры A, размерность которого равна $\deg A(\deg A + t\lambda)/2$ по одному из возможных определений того, когда инволюция является ортогональной (соотв., симплектической) [18, chap. 8, def. 7.6].

Для произвольного A-модуля N и любого $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\operatorname{Herm}^\lambda(N^n) \simeq \operatorname{Sesq}(N)^{n(n-1)/2} \oplus \operatorname{Herm}^\lambda(N)^n\,,$$

откуда видно, что (ii) выполнено для N, если и только если (ii) справедливо для N^n. Это наблюдение завершает доказательство, поскольку $N^n \simeq A^m$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$. □

Так как $\operatorname{rk}_A N_1 = i$, $\operatorname{rk}_A N_1' = j - i$, $\operatorname{rk}_A N_3 = k$ и $\operatorname{rk}_A N_3' = \operatorname{rk}_A W - k$, мы получаем, что

$$r_{ijk} = i(j-i) + i(i - t\lambda)/2 + i(\operatorname{rk}_A W - k) + k(j-i)\ .$$

□

16.

Многообразия флагов изотропных идеалов

Определение **16.1.** Пусть A — некоторая конечномерная F-алгебра с инволюцией σ, а V — конечно-порожденный A-модуль с λ-эрмитовой формой h. Для любого $m \in \mathbb{N}$ мы полагаем

$$\mathbf{\Phi}^A_m(V,h) = \mathbf{\Phi}^A_m(V) \cap \mathbb{I}\Gamma^A(V,h)^{\times m} \quad \subset \mathbb{I}\Gamma^A(V)^{\times m}\ .$$

В случае когда $V = A$, а форма h такая как в (14.1), мы используем сокращенное обозначение $\mathbf{\Phi}^{A,\sigma}_m$ для $\mathbf{\Phi}^A_m(V,h)$ и называем это многообразием m-флагов *(*правых*)* *(*тотально*)* изотропных идеалов алгебры с инволюцией (A,σ).

Лемма **16.2.** Для двух произвольных конечномерных F-алгебр с инволюциями (A_1,σ_1) и (A_2,σ_2) и для любого $m \in \mathbb{N}$, справедливо

$$\mathbf{\Phi}^{A_1\times A_2, \sigma_1\times\sigma_2}_m \simeq \mathbf{\Phi}^{A_1,\sigma_1}_m \times \mathbf{\Phi}^{A_2,\sigma_2}_m\ .$$

□

Лемма **16.3.** Пусть A — сепарабельная F-алгебра. Положим $B = A \times A^{\mathrm{op}}$ и пусть τ — инволюция перестановки сомножителей на B. Тогда $\mathbf{\Phi}^{B,\tau}_m \simeq \mathbf{\Phi}^A_{2m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Взаимно обратные изоморфизмы этих F-функторов определяются так (ср. с доказательством (15.5)). Для любой $R \in F\text{-}\mathfrak{alg}$, поставим в соответствие элементу

$$(I_1 \times I_1' \subset \dots \subset I_m \times I_m') \in \mathbf{\Phi}^{B,\tau}_m(R)$$

элемент

$$(I_1 \subset \dots \subset I_m \subset \operatorname{Ann} I_m' \subset \dots \subset \operatorname{Ann} I_1') \in \mathbf{\Phi}^A_{2m}(R)\ ;$$

в обратную сторону, элементу

$$(I_1 \subset \dots \subset I_m \subset J_m \subset \dots \subset J_1) \in \mathbf{\Phi}^A_{2m}(R)$$

поставим в соответствие элемент

$$(I_1 \times \operatorname{Ann} J_1 \subset \dots \subset I_m \times \operatorname{Ann} J_m) \in \mathbf{\Phi}^{B,\tau}_m(R)\ .$$

□

На весь срок до конца этого § мы фиксируем некоторую сепарабельную алгебру A с инволюцией σ и конечно-порожденный A-модуль V с невырожденной λ-эрмитовой формой h (как всегда, $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$).

Лемма **16.4** (Эквивалентность Мориты)**.** Положим $B = \operatorname{End}_A V$ и пусть τ — присоединенная инволюция на B. Тогда $\mathbf{\Phi}^A_m(V,h) \simeq \mathbf{\Phi}^{B,\tau}_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. □

Следствие **16.5.** Многообразия $\mathbf{\Phi}^A_m(V,h)$ являются гладкими.

Доказательство. Достаточно разобраться лишь с многообразием $\mathbf{\Phi}_m^{A,\sigma}$ (16.4), в предположении, что поле F алгебраически замкнуто, а алгебра с инволюцией (A,σ) неразложима (16.2). Тогда найдется векторное F-пространство W такое что либо $A \simeq \operatorname{End}_F W$, либо $A \simeq \operatorname{End} W \times \operatorname{End} W^*$, причем σ во втором случае — это инволюция перестановки сомножителей.

Рассмотрим первый случай. В зависимости от типа инволюции σ, найдется симметрическая или кососимметрическая невырожденная билинейная форма h на W такая что σ является инволюцией, присоединенной к h (относительно тождественной инволюции на F). Тогда $\mathbf{\Phi}_m^{A,\sigma} \simeq \mathbf{\Phi}_m^F(W,h)$ по (16.4). Полученное многообразие является гладким, так как оно покрывается аффинными пространствами (ср. с (11.3) и (13.3)).

Во втором случае имеем по (16.3) изоморфизм $\mathbf{\Phi}_m^{A,\sigma}$ с многообразием $\mathbf{\Phi}_{2m}(W)$, являющимся гладким в силу (11.3). □

Теорема **16.6.** *Пусть A — сепарабельная F-алгебра с инволюцией, а V — конечно-порожденный A-модуль с невырожденной λ-эрмитовой формой h и ортогональным разложением*

$$V = \mathbb{H}(U) \perp W\ .$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ многообразие $\mathbf{\Phi}_m^A(V,h)$ является относительным клеточным пространством над $\mathbf{\Phi}_{2m}^A(U) \times \mathbf{\Phi}_m^A(W,h)$. □

Следствие **16.7.** *В категории соответствий $\mathcal{CV}$ для любого $m \in \mathbb{N}$ имеется изоморфизм*

$$\mathbf{\Phi}_m^A(V,h) \simeq \mathbf{\Phi}_{2m}^A(U) \times \mathbf{\Phi}_m^A(W,h)\ .$$

В частности,

$$\mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}_m^A(V,h)\right) \simeq \mathrm{H}\left(\mathbf{\Phi}_{2m}^A(U) \times \mathbf{\Phi}_m^A(W,h)\right)$$

для любой геометрической теории когомологий H. □

Теорема **16.8.** *Для любой сепарабельной алгебры A с инволюцией σ, для любого $m \in \mathbb{N}$ в категории $\mathcal{CV}$ имеется изоморфизм*

$$\mathbf{\Phi}_m^{A,\sigma} \simeq \mathbf{\Phi}_m^{(A,\sigma)_{\mathrm{an}}}\ ,$$

где $(A,\sigma)_{\mathrm{an}}$ — анизотропное ядро пары (A,σ) (14.5). □

Компоненты

Пусть A — центральная простая F-алгебра, снабженная инволюцией σ типа t, а V — конечно-порожденный A-модуль, снабженный невырожденной λ-эрмитовой формой h.

Определение **16.9.** Для любой последовательности целых чисел $(n_1,\dots,n_m)$ положим

$$\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}^A(V,h) = \mathbf{\Phi}_m^A(V,h) \cap \mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}^A(V) \quad \subset \mathbb{\Gamma}^A(V)^{\times m}\ .$$

Аналогичным образом определяется F-функтор $\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}^{A,\sigma}$.

Лемма **16.10** (Эквивалентность Мориты)**.** *Положим $B = \operatorname{End}_A V$ и пусть τ — присоединенная инволюция на B. Тогда $\mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}^A(V,h) \simeq \mathbf{\Phi}_{(n_1,\dots,n_m)}^{B,\tau}$.* □

Следствие **16.11.** *Все многообразия $\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V,h)$ геометрически неприводимы за исключением случая, когда $t\lambda = 1$ и при этом $n_m = \operatorname{rk}_A V/2$; $\mathbf{\Phi}^A_m(V,h)$ является прямой суммой этих многообразий. В исключительном случае многообразие $\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V,h)$ либо неприводимо, либо состоит из двух изоморфных (геометрически неприводимых) компонент.*

Доказательство. Утверждение, касающееся прямой суммы, в доказательстве не нуждается. Докажем все остальное.

По только что доказанной лемме, достаточно разобраться лишь с многообразием $\mathbf{\Phi}^{B,\tau}_{(n_1,\dots,n_m)}$. При этом можно предполагать, что поле F алгебраически замкнуто. Тогда $B \simeq \operatorname{End}_F W$ для некоторого векторного F-пространства W, причем инволюция на $\operatorname{End}_F W$ является присоединенной к некоторой $t\lambda$-симметрической невырожденной билинейной форме h на W. В таком случае

$$\mathbf{\Phi}^{A,\sigma}_{(n_1,\dots,n_m)} \simeq \mathbf{\Phi}^F_{(n_1,\dots,n_m)}(W,h)$$

по (16.10). Положим

$$G = \begin{cases} \mathbb{SO}(W,h), & \text{если } t\lambda = 1; \\ \mathbb{S}\mathrm{p}(W,h), & \text{если } t\lambda = -1. \end{cases}$$

Если не рассматривать исключительный случай, алгебраическая группа G транзитивно действует на $\mathbf{\Phi}^F_{(n_1,\dots,n_m)}(W,h)$, откуда и следует требуемая геометрическая неприводимость.

В исключительном случае группа $\mathbb{O}(W,h)$ транзитивно действует на $\mathbf{\Phi}^F_{(n_1,\dots,n_m)}(W,h)$. Так как $\mathbb{SO}(W,h)$ является компонентой $\mathbb{O}(W,h)$, причем $[\mathbb{O}(W,h) : \mathbb{SO}(W,h)] = 2$, получается утверждение об исключительном случае. □

Следствие **16.12.** *В условиях (16.6), предположим, что F-алгебра A центральна и проста. Пусть H^* — градуированная геометрическая теория когомологий. Для любой последовательности целых чисел $(n_1,\dots,n_m)$ имеется изоморфизм*

$$\mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}^A_{(n_1,\dots,n_m)}(V,h)\right) \simeq$$

$$\simeq \coprod_{i_1+(\operatorname{rk} U - j_1)+k_1=n_1} \cdots \coprod_{i_m+(\operatorname{rk} U - j_m)+k_m=n_m} \mathrm{H}^*\left(\mathbf{\Phi}^A_{(i_1,\dots,i_m,j_m,\dots,j_1)}(U) \times \mathbf{\Phi}^A_{(k_1,\dots,k_m)}(W,h)\right)[\dots]$$

(вычисление индексов сдвига опускается). □

Список литературы

References

[1] Artin, M. *Brauer-Severi varieties.* Lect. Notes Math. 917 (1982), 194–210.

[2] Blanchet, A. *Function fields of generalized Brauer-Severi varieties.* Comm. Algebra 19 (1991), no. 1, 97–118.

[3] Bloch, S. *Algebraic cycles and higher K-theory.* Adv. Math. 61 (1986), 267–304.

[4] Curtis, Ch. W., Reiner, I. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Wiley Classics Library Edition Published, 1988.

[5] Demazure, M., Gabriel, P. *Groupes algébriques I.* Masson & Cie, Éditeur (Paris), North-Holland Publishing Company (Amsterdam), 1970.

[6] Faith, C. *Algebra: Rings, Modules and Categories I.* Springer-Verlag , 1973.

[7] Fulton, W. *Intersection Theory.* Springer-Verlag, 1984.

[8] Grothendieck, A., Dieudonné, J. A. *Eléments de Géométrie Algébrique I.* Grundlehren 166, Springer-Verlag, Heidelberg (new ed.), 1971.

[9] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.

[10] Н. А. Карпенко. Чжоу-мотивы Гротендика многообразий Севери-Брауэра. Алгебра и Анализ 7 (1995), no. 4, 196–213.

[11] Н. А. Карпенко, А. С. Меркурьев. Группы Чжоу проективных квадрик. Алгебра и Анализ 2 (1990), no. 3, 218–235.

[12] Köck, B. *Chow motif and higher Chow theory of G/P.* Manuscripta Math. 70 (1991), 363–372.

[13] Ю. И. Манин. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования. Математический сборник **77(119)** (1968), no. 4, 475–507.

[14] Milne, I. *Etale Cohomology.* Princeton: University Press, 1980.

[15] Quillen, D. *Higher algebraic K-theory: I.* Lect. Notes Math. 341 (1973), 85–147.

[16] Rost, M. *Some new results on the Chowgroups of quadrics.* Preprint, Regensburg, 1990.

[17] Rost, M. *Chow groups with coefficients.* Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 319–393.

[18] Scharlau, W. *Quadratic and Hermitian Forms.* Springer-Verlag, 1985.

[19] Serre, J.-P. *Corps Locaux.* Hermann, Paris, 1968.

[20] Swan, R. G. *K-theory of quadric hypersurfaces.* Ann. Math. 122 (1985), no. 1, 113–154.

[21] Tao, D. *A variety associated to an algebra with involution.* J. Algebra 168 (1994), 479–520.

Westfälische Wilhelms-Universität, Mathematisches Institut, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster, Germany

E-mail address: `karpenk@math.uni-muenster.de`