

CYCLES DE CODIMENSION 2 SUR PRODUITS DE VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

NIKITA A. KARPENKO

RÉSUMÉ. Nous recherchons le groupe de Chow des cycles de codimension 2 en le produit de n variétés de Severi-Brauer ($n \geq 2$). Nous analysons plus en détail

- le produit d'une variété biquaternionique et d'une conique;
- le produit de deux surfaces de Severi-Brauer.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	2
1. Deux résultats préliminaires	2
2. Groupe de Grothendieck de produit de variétés de Severi-Brauer	3
3. Variétés et algèbres disjointes	4
4. Variétés "génériques"	6
5. Algèbres "génériques"	7
6. Variété biquaternionique fois conique	9
7. Produit de deux surfaces de Severi-Brauer	12
Références	15

0. INTRODUCTION

Dans [9], nous recherchions le groupe de Chow CH^2 pour une variété de Severi-Brauer. Ici, en utilisant les mêmes méthodes, nous recherchons le même groupe pour un produit direct de mêmes variétés. La motivation pour ce travail est donnée par un résultat de Izhboldin ([5]): le corps de fonctions d'une variété de Severi-Brauer est universellement excellent si et seulement si l'indice de l'algèbre correspondante n'est pas divisible par 4. Cependant, pour ce résultat, il avait besoin d'information certaine sur le groupe CH^2 du produit d'une variété biquaternionique et d'une conique (6.1).

Des premiers résultats sur le groupe CH^2 d'un produit de variétés de Severi-Brauer sont obtenus dans [14]. On y établit sa connexion avec le 3-ième groupe de cohomologie galoisienne ([14, theorem 4.1]) et on y construit un exemple d'un produit de trois coniques avec torsion dans CH^2 ([14, remark 6.1]).

Le résultat principal et général de l'article présent est 5.5 (avec le corollaire 5.6). Nous l'appliquons à des produits de deux variétés de petites dimensions (6.1), (7.1); on arrive en particulier à des exemples nouveaux de torsion dans CH^2 .

Nous utilisons la terminologie et la notation suivantes. Si on dit que A est une algèbre, on veut toujours dire que A est une algèbre centrale simple sur un corps. Pour une algèbre A sur un corps F on note $[A]$ sa classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ de F ; $\exp A$ désigne l'exposant, $\deg A$ le degré et $\mathrm{ind} A$ l'indice de A .

La variété de Severi-Brauer d'une algèbre A est désignée par $\mathrm{SB}(A)$. Une variété est toujours une variété algébrique projective lisse sur un corps; un faisceau sur X est un \mathcal{O}_X -module. L'anneau de Grothendieck d'une variété X est désigné par $K(X)$;

$$K(X) = \Gamma^0 K(X) \supset \Gamma^1 K(X) \supset \dots \quad \text{et} \quad K(X) = \mathrm{T}^0 K(X) \supset \mathrm{T}^1 K(X) \supset \dots$$

sont respectivement la gamma-filtration et la filtration topologique de $K(X)$; on utilise la notation $\mathrm{G}^* \Gamma K(X)$ et $\mathrm{G}^* \mathrm{T} K(X)$ pour les anneaux adjoints gradués de ces filtrations. Il y a des relations certaines entre $\mathrm{G}^* \Gamma K(X)$, $\mathrm{G}^* \mathrm{T} K(X)$ et l'anneau de Chow $\mathrm{CH}^*(X)$ que nous utilisons mais ne décrivons pas ici; on les trouve dans [9, §2].

Ce travail est exécuté au Labo de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté. Je le remercie sincèrement pour l'atmosphère et les conditions excellentes.

1. DEUX RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Proposition 1.1. *Soient A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_m des algèbres sur un corps F telles que les sous-groupes de $\mathrm{Br}(F)$ engendrés par $[A_1], \dots, [A_n]$ et par $[B_1], \dots, [B_m]$ coïncident. Alors*

$$\mathrm{Tors} \mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}(A_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(A_n)) \simeq \mathrm{Tors} \mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}(B_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(B_m)).$$

Démonstration. Posons $X = \text{SB}(A_1) \times \cdots \times \text{SB}(A_n)$, $Y_1 = \text{SB}(B_1)$. Il suffit de montrer que

$$\text{Tors CH}^2(X) \simeq \text{Tors CH}^2(X \times Y_1) .$$

Puisque $X \times Y_1 \rightarrow X$ est une fibration projective (5.3), on a ([4, §2 of appendix A])

$$\text{CH}^2(X \times Y_1) \simeq \text{CH}^2(X) \oplus \cdots \oplus \text{CH}^{2-\dim Y_1}(X) .$$

La dernière observation est: pour tout $i < 2$, le groupe $\text{CH}^i(X)$ n'a pas de torsion (pour $i = 1$ v. [16, lemme 6.3, (i)]). \square

Soit p un premier. Pour une algèbre ainsi que pour un groupe abélien A , on va noter $A\{p\}$ la partie p -primaire de A .

Proposition 1.2. *Soient A_1, \dots, A_n des algèbres sur un (même) corps. On a $\text{CH}^2(\text{SB}(A_1) \times \cdots \times \text{SB}(A_n))\{p\} \simeq \text{Tors CH}^2(\text{SB}(A_1\{p\}) \times \cdots \times \text{SB}(A_n\{p\}))$.*

Démonstration. Pour $n = 1$, le résultat est démontré dans [9, proposition 1.3]. La même preuve marche pour $n > 1$. \square

2. GROUPE DE GROTHENDIECK DE PRODUIT DE VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

Soient A_1, \dots, A_n des algèbres sur un corps F , X_1, \dots, X_n leurs variétés de Severi-Brauer et $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Fixons une clôture séparable \bar{F} de F et posons $\bar{X}_i = (X_i)_{\bar{F}}$ pour chaque i . Les variétés \bar{X}_i sont des espaces projectifs; notons ξ_i la classe dans $K(\bar{X})$ du faisceau tautologique de la fibration projective

$$\bar{X} \rightarrow \prod_{j \neq i} \bar{X}_j .$$

L'anneau $K(\bar{X})$ est engendré par les éléments ξ_1, \dots, ξ_n avec les seules relations

$$(\xi_1 - 1)^{\deg A_1} = \cdots = (\xi_n - 1)^{\deg A_n} = 0 .$$

Regardons la restriction $K(X) \rightarrow K(\bar{X})$ qui est un homomorphisme d'anneaux.

Théorème 2.1. *L'homomorphisme $K(X) \rightarrow K(\bar{X})$ est injectif; son image est additivement engendrée par les éléments*

$$\text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) \cdot \xi_1^{j_1} \cdots \xi_n^{j_n}$$

avec $0 \leq j_1 < \deg A_1, \dots, 0 \leq j_n < \deg A_n$.

Démonstration. On utilise [15, §8, theorem 4.1] n fois. \square

Corollaire 2.2. *Pour des algèbres A_1, \dots, A_n des degrés fixés, l'anneau $K(X)$ avec la gamma-filtration (et le groupe $\text{Tors G}^2\Gamma K(X)$ en particulier) dépend seulement des nombres $\text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$.*

Démonstration. Par le théorème, les nombres déterminent $K(X)$ entièrement comme un sous-anneau de $K(\bar{X})$. Les classes de Chern à valeurs dans K ([9, définition 2.1]) pour X qui déterminent la gamma-filtration ([9, définition 2.6]) sont les restrictions des classes de Chern pour \bar{X} . \square

3. VARIÉTÉS ET ALGÈBRES DISJOINTES

Définition 3.1. Soient X_1, \dots, X_n des variétés quelconques sur un (même) corps. Nous disons qu'elles sont *disjointes* si l'homomorphisme d'anneaux

$$K(X_1) \otimes \cdots \otimes K(X_n) \rightarrow K(X_1 \times \cdots \times X_n),$$

induit par les homomorphismes d'image inverse

$$pr_i^*: K(X_i) \rightarrow K(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

par rapport aux projections $pr_i: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i$, est un isomorphisme.

Proposition 3.2. Soient X_1, \dots, X_n des variétés disjointes. La gamma-filtration de $K(X_1 \times \cdots \times X_n)$ coïncide avec la filtration induite par les gamma-filtrations de $K(X_1), \dots, K(X_n)$.

Démonstration. Notons X le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ et $\tilde{\Gamma}$ la filtration induite. Alors, pour chaque $l \geq 0$, on définit $\tilde{\Gamma}^l K(X)$ comme le sous-groupe de $K(X)$ engendré par tous les produits

$$pr_1^* \Gamma^{l_1} K(X_1) \cdots pr_n^* \Gamma^{l_n} K(X_n)$$

avec $l_1 + \cdots + l_n \geq l$. Comme un homomorphisme d'image inverse respecte la gamma-filtration, on a l'inclusion $\tilde{\Gamma}^l K(X) \subset \Gamma^l K(X)$. Démontrons l'inclusion inverse. Puisque la gamma-filtration Γ de $K(X)$ est la plus petite filtration d'anneau ayant les propriétés $\Gamma^0 K(X) = K(X)$ et $c^l(x) \in \Gamma^l K(X)$ pour tout $x \in K(X)$ et $l \geq 1$, où c^l est la l -ième classe de Chern à valeurs dans K ([9, définition 2.1]), il suffit de montrer que

$$(*) \quad c^l(x) \in \tilde{\Gamma}^l K(X).$$

Comme les variétés X_1, \dots, X_n sont disjointes, le groupe additif de $K(X)$ est engendré par les produits

$$(**) \quad x = pr_1^*(x_1) \cdots pr_n^*(x_n)$$

où $x_i \in K(X_i)$ est la classe d'un faisceau localement libre. Il suffit donc de vérifier l'inclusion (*) seulement pour x de la forme (**). Puisque c^l commute avec pr_i^* , on a

$$c^l(pr_i^*(x_i)) \in \tilde{\Gamma}^l K(X),$$

et le dernier pas de la preuve est

Lemme 3.3. Soient $n, m, l \geq 0$. Il existe un polynôme $f_l((\sigma_i), (\tau_j))$ sur \mathbb{Z} en les variables $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et τ_1, \dots, τ_m ayant les deux propriétés suivantes:

- si $x, y \in K(X)$ sont les classes de faisceaux localement libres sur une variété X , la classe de Chern $c^l(x \cdot y)$ est égale à $f_l(c^i(x), c^j(y))$;
- si on pose $\deg \sigma_i = i$ et $\deg \tau_j = j$, le degré de chaque monôme de f_l est supérieur ou égal à l .

Démonstration. Par le principe de décomposition ([13, prop. 5.6]), il suffit de regarder le cas où

$$x = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad y = \eta_1 + \cdots + \eta_m$$

avec les classes de faisceaux inversibles ξ_i, η_j . Pour la classe de Chern totale c_t ([9, définition 2.1]), on a

$$\begin{aligned} c_t(x) &= c_t\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 + (\xi_i - 1)t) = \prod_{i=1}^n (1 + a_i t) \quad \text{où } a_i = \xi_i - 1; \\ c_t(y) &= c_t\left(\sum_{j=1}^m \eta_j\right) = \prod_{j=1}^m (1 + (\eta_j - 1)t) = \prod_{j=1}^m (1 + b_j t) \quad \text{où } b_j = \eta_j - 1; \\ c_t(xy) &= c_t\left(\sum_{i,j} \xi_i \eta_j\right) = \prod_{i,j} (1 + (\xi_i \eta_j - 1)t) = \prod_{i,j} (1 + (a_i b_j + a_i + b_j)t). \end{aligned}$$

La classe $c^l(xy)$ est (par définition) le coefficient de t^l dans $c_t(xy)$. Ce coefficient est évidemment un polynôme en a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_m qui est symétrique par rapport aux variables (a_i) et aussi symétrique par rapport aux variables (b_j) (notons que le degré de chaque monôme est au moins égal à l). Alors, par le théorème fondamental sur les polynômes symétriques, $c^l(xy) = f_l((\sigma_i), (\tau_j))$ pour un polynôme f_l , où $(\sigma_i)_{i=1}^n$ sont les polynômes symétriques élémentaires en (a_i) (σ_i est un polynôme homogène de degré i) et $(\tau_j)_{j=1}^m$ les polynômes symétriques élémentaires en (b_j) . L'assertion de la lemme concernant le degré est évidemment satisfaite. Finalement, on note que $\sigma_i = c^i(x)$ et $\tau_j = c^j(y)$. \square

Corollaire 3.4. *Soient X_1, \dots, X_n des variétés telles que leurs groupes de Grothendieck sont finement engendrés (des variétés de Severi-Brauer par exemple). Si les variétés sont disjointes et les groupes $G^* \Gamma K(X_1), \dots, G^* \Gamma K(X_n)$ n'ont pas de torsion, le groupe $G^* \Gamma K(X_1 \times \cdots \times X_n)$ est aussi sans torsion.*

Démonstration. L'homomorphisme naturel

$$G^* \Gamma K(X_1) \otimes \cdots \otimes G^* \Gamma K(X_n) \rightarrow G^* \Gamma K(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

est surjectif par la proposition. Par notre condition, le groupe du côté gauche est finement engendré et sans torsion; alors c'est un groupe libre abélien de rang fini. Ce rang coïncide avec le rang du groupe du côté droit parce que les variétés sont disjointes. \square

Maintenant, on va comprendre ce que la condition d'être disjointes veut dire pour des variétés de Severi-Brauer.

Définition 3.5. Soient A_1, \dots, A_n des algèbres sur un (même) corps. On dit qu'elles sont *disjointes* si

$$\text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) = \text{ind} A_1^{\otimes j_1} \cdots \text{ind} A_n^{\otimes j_n} \quad \text{pour tous } j_1, \dots, j_n \geq 0.$$

Proposition 3.6. *Des algèbres A_1, \dots, A_n sont disjointes si et seulement si leurs variétés de Severi-Brauer sont disjointes.*

Démonstration. Comme pour une algèbre A arbitraire il y a un isomorphisme canonique $K(A) = \text{ind } A \cdot \mathbb{Z}$ où maintenant K note le groupe de Grothendieck de l'algèbre, les algèbres sont disjointes si et seulement si les applications

$$K(A_1^{\otimes j_1}) \otimes \cdots \otimes K(A_n^{\otimes j_n}) \rightarrow K(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$$

sont des isomorphismes pour tous $0 \leq j_1 < \deg A_1, \dots, 0 \leq j_n < \deg A_n$. En prenant la somme directe, on obtient l'application

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j_1=0}^{\deg A_1-1} K(A_1^{\otimes j_1}) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\prod_{j_n=0}^{\deg A_n-1} K(A_n^{\otimes j_n}) \right) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \prod_{j_1=0}^{\deg A_1-1} \cdots \prod_{j_n=0}^{\deg A_n-1} K(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}). \end{aligned}$$

En identifiant les facteurs du produit du côté gauche avec $K(\text{SB}(A_1)), \dots, K(\text{SB}(A_n))$ et la somme directe du côté droit avec $K(\text{SB}(A_1) \times \cdots \times \text{SB}(A_n))$ par 2.1, on obtient à la place de la flèche l'homomorphisme de 3.1. \square

4. VARIÉTÉS “GÉNÉRIQUES”

Définition 4.1. Disons que une variété X est “générique” si la gamma-filtration de $K(X)$ coïncide avec la filtration topologique.

Lemme 4.2. Si $\text{Tors } G^* \Gamma K(X) = 0$ (pour une variété arbitraire X), alors X est “générique”.

Démonstration. Pour voir que les filtrations coïncident, il suffit de montrer que l'homomorphisme

$$\alpha: G^* \Gamma K(X) \rightarrow G^* \text{TK}(X),$$

induit par l'inclusion des filtrations, est injectif. Comme $\alpha \otimes \mathbb{Q}$ est bijectif ([3, proposition 5.5 of chapter VI]), le noyau de α contient seulement des éléments d'ordre fini. Donc α est vraiment injectif si le groupe $G^* \Gamma K(X)$ est sans torsion. \square

Lemme 4.3. Soit $\mathcal{G} \rightarrow X$ une fibration grassmannienne. Si X est “générique”, la variété \mathcal{G} est pareillement “générique”.

Démonstration. Puisque \mathcal{G} est une fibration grassmannienne sur X , la $\text{CH}^*(X)$ -algèbre (commutative) $\text{CH}^*(\mathcal{G})$ est engendrée par les classes de Chern (à valeurs dans CH^*) (v. [2, proposition 14.6.5] ou [11, (3.2)]). En utilisant l'épimorphisme naturel $\text{CH}^* \rightarrow G^* \text{TK}$, on obtient le même résultat pour $G^* \text{TK}$: la $G^* \text{TK}(X)$ -algèbre (commutative) $G^* \text{TK}(\mathcal{G})$ est engendrée par les classes de Chern (à valeurs dans $G^* \text{TK}$). Comme X est “générique”, l'anneau $G^* \text{TK}(X)$ même est engendré par les classes de Chern ([9, remark 2.17]). Par conséquent, $G^* \text{TK}(\mathcal{G})$ est engendré par les classes de Chern non seulement comme l'algèbre mais aussi comme un anneau. Cela veut dire que \mathcal{G} est “générique” ([9, remark 2.17]). \square

Lemme 4.4. *Soit $X \rightarrow Y$ un morphisme lisse de variétés, \tilde{X} sa fibre générique. Si X est “générique”, la variété \tilde{X} (c’est une variété sur le corps de fonctions de Y) est aussi “générique”.*

Démonstration. Le morphisme (de schémas) $\tilde{X} \rightarrow X$ induit un homomorphisme des groupes de Grothendieck $K(X) \rightarrow K(\tilde{X})$, respectant les deux filtrations, et un homomorphisme des groupes de Chow $\mathrm{CH}^*(X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\tilde{X})$ qui est surjectif ([10, theorem 3.1]). Par conséquent, l’homomorphisme

$$\mathrm{G}^*TK(X) \rightarrow \mathrm{G}^*TK(\tilde{X})$$

est aussi surjectif, et donc, pour chaque l , le groupe $\mathrm{T}^lK(X)$ est appliqué surjectivement dans $\mathrm{T}^lK(\tilde{X})$. Puisque $\mathrm{T}^lK(X) = \Gamma^lK(X)$, on en déduit que $\mathrm{T}^lK(\tilde{X}) \subset \Gamma^lK(\tilde{X})$. L’inclusion inverse a lieu tout le temps. \square

Corollaire 4.5. *Soient X et Y des variétés sur un corps F telles que la projection $X \times Y \rightarrow X$ est une fibration grassmannienne. Si X est “générique”, alors $X_{F(Y)}$ est pareillement “générique”.*

Démonstration. La variété $X \times Y$ est “générique” d’après 4.3; ensuite la variété $X_{F(Y)}$ est “générique” par 4.4. \square

5. ALGÈBRES “GÉNÉRIQUES”

Proposition 5.1. *Soit A une algèbre primaire (i.e. $\deg A$ est une puissance d’un premier). On suppose que*

- soit $\mathrm{ind} A = \exp A$
- soit $\mathrm{ind} A = 2^n$ et $\mathrm{ind} A^{\otimes 2^n - 2} = 4$ ($n \geq 2$)

(une algèbre des biquaternions est un exemple de telle A). Alors, le groupe $\mathrm{G}^*\Gamma(\mathrm{SB}(A))$ n’a pas de torsion.

Démonstration. Pour des algèbres du premier type, v. [9, proposition 3.3, corollary 3.6]; pour le deuxième type, v. la démonstration de [9, proposition 4.9]. \square

Corollaire 5.2. *Soient A_1, \dots, A_n des algèbres disjointes et supposons que chaque A_i satisfait la condition de 5.1. Alors pour le produit X de leurs variétés de Severi-Brauer, on a: $\mathrm{Tors} \mathrm{G}^*\Gamma K(X) = 0$; en particulier, $\mathrm{Tors} \mathrm{CH}^2(X) = 0$.*

Démonstration. Ceci résulte directement de la proposition avec 3.4 et 3.6. \square

Pour une algèbre B et un entier $r \geq 0$, notons $\mathrm{SB}(r, B)$ la variété de Severi-Brauer généralisée des idéaux à droite de B de rang r ([1, §2]). En particulier, $\mathrm{SB}(1, B) = \mathrm{SB}(B)$.

Proposition 5.3. *Soient A_1, \dots, A_n et B des algèbres sur un (même) corps, $X = \mathrm{SB}(A_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(A_n)$ et $Y = \mathrm{SB}(r, B)$ avec certain $r \geq 0$.*

Si la classe $[B]$ de l’algèbre B dans le groupe de Brauer appartient au groupe engendré par $[A_1], \dots, [A_n]$, la projection $X \times Y \rightarrow X$ est une fibration r -grassmannienne.

Démonstration. On peut supposer que

$$B \simeq A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}$$

avec $j_1, \dots, j_n \geq 0$ certains. Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & T \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & T \end{array}$$

où $T = \text{SB}(B)$ et le morphisme $X \rightarrow T$ est donné par le produit tensoriel d'idéaux. La flèche du côté droit (c'est la projection $T \times Y \rightarrow T$) est une fibration r -grassmannienne d'après [9, proposition 6.3]. Donc, la projection $X \times Y \rightarrow Y$ (c'est la flèche du côté gauche) est aussi une fibration r -grassmannienne. \square

Définition 5.4. Disons que une collection d'algèbres $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ est "générique", si c'est un résultat d'une procédure suivante. On commence avec des algèbres disjointes A_1, \dots, A_n sur un corps F telles que chaque A_i satisfait la condition de 5.1. Puis, on prend des F -algèbres B_1, \dots, B_m telles que leurs classes dans $\text{Br}(F)$ appartiennent au sous-groupe engendré par $[A_1], \dots, [A_n]$. Enfin, on prend comme Y un produit direct de variétés de Severi-Brauer généralisées quelconques des algèbres B_1, \dots, B_m et on pose $\tilde{A}_i = (A_i)_{F(Y)}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Théorème 5.5. *Si une collection d'algèbres $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ est "générique", le produit \tilde{X} de leurs variétés de Severi-Brauer est une variété "générique" (4.1); en particulier, l'épimorphisme*

$$\text{Tors } G^2\Gamma K(\tilde{X}) \rightarrow \text{Tors } \text{CH}^2(\tilde{X})$$

est bijectif dans ce cas.

Démonstration. Soient A_1, \dots, A_n les algèbres utilisées pour construction de notre collection "générique" (5.4). Posons $X_i = \text{SB}(A_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et soit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. D'après 5.2, le groupe $G^*\Gamma K(X)$ est sans torsion. En particulier, la variété X est "générique" (4.2).

Maintenant, soit Y le produit direct de variétés de Severi-Brauer généralisées, utilisé dans la construction de notre collection "générique". Par 5.3, la projection $X \times Y \rightarrow X$ est un produit fibré (sur X) de fibrations grassmanniennes. Donc, en utilisant (4.5) m fois, on démontre que la variété $\tilde{X} = X_{F(Y)}$ est "générique". \square

Corollaire 5.6. *Soient A_1, \dots, A_n des algèbres quelconques et X le produit de leurs variétés de Severi-Brauer. Soit $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ une collection "générique" d'algèbres telles que $\deg \tilde{A}_i = \deg A_i$ et*

$$\text{ind}(\tilde{A}_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n^{\otimes j_n}) = \text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$$

pour tout i et tous j_1, \dots, j_n .

Le groupe $\text{Tors } \text{CH}^2(X)$ est isomorphe à un groupe quotient de $\text{Tors } \text{CH}^2(\tilde{X})$.

Démonstration. Par le théorème, on a un isomorphisme

$$\text{Tors CH}^2(\tilde{X}) \simeq \text{Tors G}^2\Gamma K(\tilde{X}) ;$$

par 2.2, on a

$$\text{Tors G}^2\Gamma K(\tilde{X}) \simeq \text{Tors G}^2\Gamma K(X) ;$$

enfin, on a toujours une surjection ([9, 2.15])

$$\text{Tors G}^2\Gamma K(X) \twoheadrightarrow \text{Tors CH}^2(X) .$$

□

6. VARIÉTÉ BIQUATERNIONIQUE FOIS CONIQUE

Nous appelons *variété biquaternionique* une variété de Severi-Brauer d'une algèbre des biquaternions.

Théorème 6.1. *Soient X une variété biquaternionique, Y une conique (sur le même corps) et A, B les algèbres correspondantes (B est une algèbre des quaternions).*

1. *La torsion dans le groupe $\text{CH}^2(X \times Y)$ est soit triviale, soit d'ordre 2.*
2. *Si la torsion n'est pas triviale, alors*

$$(*) \quad \text{ind } A = \text{ind}(A \otimes B) = 4 \quad \text{et} \quad \text{ind } B = 2 .$$

3. *Si la collection A, B est "générique" (5.4) et satisfait la condition (*), alors la torsion n'est pas triviale.*

Démonstration. Si $\text{ind } B \neq 2$, c.-à.-d. si B est décomposée, on sait par 1.1 que $\text{Tors CH}^2(X \times Y) \simeq \text{CH}^2(X)$; le dernier groupe n'a pas de torsion ([8, corollary]).

Si $\text{ind } A \neq 4$, alors A est Brauer-équivalente à une algèbres des quaternions A' ; désignant par X' sa variété de Severi-Brauer, on obtient (1.1)

$$\text{Tors CH}^2(X \times Y) \simeq \text{Tors CH}^2(X' \times Y) .$$

Puisque $\dim(X' \times Y) = 2$, le groupe

$$\text{G}^2\Gamma K(X' \times Y) = \Gamma^2 K(X' \times Y) \subset K(X' \times Y)$$

n'a pas de torsion. On en conclut que $\text{Tors CH}^2(X \times Y) = 0$ aussi dans ce cas.

Soit C l'algèbre à division qui est Brauer-équivalente au produit $A \otimes B$; $T = \text{SB}(C)$. En utilisant 1.1 de nouveau, on tire

$$\text{Tors CH}^2(X \times Y) \simeq \text{Tors CH}^2(T \times Y) .$$

Si $\text{ind}(A \otimes B) \leq 2$, alors $\dim T \times Y \leq 2$ et on finit au même façon comme ci-dessus.

Si $\text{ind}(A \otimes B) = 8$, les algèbres A, B sont disjointes et 5.2 montre que $\text{Tors CH}^2(X \times Y) = 0$.

Le reste est desservi par

Proposition 6.2. *Supposons que une algèbre des biquaternions A et une algèbre des quaternions B sont des algèbres à division et $\text{ind}(A \otimes B) = 4$. Pour X, Y comme ci-dessus, on a: $\text{Tors } G^2\Gamma K(X \times Y) \simeq \mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. Posons $K = K(X \times Y)$, $\bar{K} = K(\bar{X} \times \bar{Y})$. L'anneau \bar{K} est engendré par les éléments ξ, η avec les seules relations $(\xi - 1)^4 = 0 = (\eta - 1)^2$ (v. §2). En particulier, le groupe additif de \bar{K} est un groupe abélien librement engendré par les éléments $\xi^i \eta^j$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1$. Nous allons aussi utiliser un autre système de générateurs: $f^i g^j$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1$, où $f = \xi - 1$, $g = \eta - 1$.

Pour chaque l , le l -ième terme $\Gamma^l \bar{K}$ de la gamma-filtration de \bar{K} est engendré par les produits $f^i g^j$ avec $i + j \geq l$. En particulier, $G^l \bar{K}$ est un groupe abélien librement engendré par les classe résiduelles des produits $f^i g^j$ avec $i + j = l$.

Lemme 6.3. *Le sous-anneau $K \subset \bar{K}$ est additivement engendré par les éléments*

$$1, 4\xi, \xi^2, 4\xi^3, 2\eta, 4\xi\eta, 2\xi^2\eta, 4\xi^3\eta.$$

Démonstration. C'est 2.1 à notre situation particulier. □

Lemme 6.4. *Les éléments suivants sont aussi des générateurs du groupe additif de K :*

$$1, 2f - f^2, 2g, 2f^2, 4fg, 4f^3, \boxed{2f^2g}, 4f^3g$$

(l'élément relevé va produire la torsion — v. 6.9). □

Lemme 6.5. *Il y a les inclusions suivantes:*

$$\begin{aligned} \Gamma^1 K &\ni 2f - f^2, 2g; \\ \Gamma^2 K &\ni 2f^2, 4fg, \boxed{2f^2g}; \\ \Gamma^3 K &\ni 4f^3, 2 \cdot \boxed{2f^2g}; \\ \Gamma^4 K &\ni 4f^3g. \end{aligned}$$

Démonstration. L'assertion sur $\Gamma^1 K$ est évidente.

Puisque $2f^2, 4fg \in K \cap \Gamma^2 \bar{K}$ et l'homomorphisme $G^1 \Gamma K \rightarrow G^1 \Gamma \bar{K}$ est injectif ([16, lemme 6.3, (i)]), l'assertion sur $\Gamma^2 K$ a lieu (une vérification direct (v. le reste de la démonstration) est aussi facile).

Finalement, on a:

$$\begin{aligned} c_t(4\xi) = (1 + ft)^4 &\Rightarrow c^3(4\xi) = 4f^3 &\Rightarrow 4f^3 \in \Gamma^3 K; \\ 2f^2 \in \Gamma^2 K \text{ et } 2g \in \Gamma^1 K &\Rightarrow 4f^2g = (2f^2) \cdot (2g) \in \Gamma^3 K; \end{aligned}$$

$$c^4(4\xi\eta) = (\xi\eta - 1)^4 = ((f + 1)(g + 1) - 1)^4 = 4f^3g \in \Gamma^4 K.$$

□

Corollaire 6.6. *Notons α^* l'homomorphisme de restriction $G^* \Gamma K \rightarrow G^* \Gamma \bar{K}$. Pour tout $i > 0$, on a: $\text{Im } \alpha^i \subset 2G^i \Gamma \bar{K}$.*

Démonstration. D'après le lemme, le groupe $G^1\Gamma K$ est engendré par les classes résiduelles des éléments $2f - f^2$ et $2g$; leurs images dans $G^1\Gamma\bar{K}$ sont effectivement divisibles par 2. Ainsi, l'assertion du corollaire pour $i = 1$ est démontrée.

Puisque les éléments de Γ^2K , Γ^3K et Γ^4K énumérés dans le lemme engendrent Γ^2K et sont divisibles par 2 dans \bar{K} , on obtient l'assertion pour $i \geq 2$ (on utilise l'absence de torsion dans $G^*\Gamma\bar{K}$). \square

Corollaire 6.7. $\# \text{Tors } G^*\Gamma K \leq 2$.

Démonstration. Comme le groupe $G^*\Gamma\bar{K}$ est sans torsion, $\text{Tors } G^*\Gamma K \subset \text{Ker } \alpha^*$. Nous allons montrer que $\# \text{Ker } \alpha^* \leq 2$ en utilisant la formule suivante ([7, proposition]):

$$\# \text{Ker } \alpha^* = \# \text{Coker } \alpha^* / \#(\bar{K}/K).$$

Il est facile de calculer que $\#(\bar{K}/K) = 2^{10}$. D'après le lemme, $\# \text{Coker } \alpha^* \leq 2^{11}$. \square

Lemme 6.8. $2f^2g \notin \Gamma^3K$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\text{Im } \alpha^3 \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$.

Le groupe $\text{Im } \alpha^3$ est engendré par le sous-groupe $\text{Im } \alpha^1 \cdot \text{Im } \alpha^2$ est le sous-ensemble $\alpha^3(c^3K)$, où c^3 est la 3-ième classe de Chern à valeurs dans $G^*\Gamma K$ ([9, définition 2.7]). Puisque $\text{Im } \alpha^i \subset 2G^i\Gamma\bar{K}$ pour $i > 0$ par 6.6, on a: $\text{Im } \alpha^1 \cdot \text{Im } \alpha^2 \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$. Il suffit donc de vérifier que $\alpha^3(c^3(S)) \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$ pour un système S de générateurs du groupe additif de K . La vérification est triviale si on prend à titre de S le système de générateurs de 6.3. \square

Corollaire 6.9. *Le résidu de $2f^2g$ dans $G^2\Gamma K$ a l'ordre 2 et engendre le sous-groupe de torsion.*

Démonstration. Le résidu est d'ordre 2 d'après 6.8 et 6.5. Il engendre tout le sous-groupe de torsion (non seulement de $G^3\Gamma K$ mais aussi d'entier $G^*\Gamma K$) par 6.7. \square

Nous avons fini les démonstrations du théorème et de la proposition. \square

\square

Remarque 6.10. A la condition du théorème, notons F le corps de base et supposons qu'il existe une extension quadratique L/F (ou, plus généralement, une extension de degré indivisible par 4) telle que l'algèbre A_L n'est plus une algèbre à division et l'algèbre B_L est décomposée. Dans ce cas, $f^2g \in T^3K(X_L \times Y_L)$; en utilisant l'application de norme, nous obtenons: $2f^2g \in T^3K(X \times Y)$, i.e. $\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y) = 0$.

Alors, si A, B sont telles que $\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y) \neq 0$ (par exemple, si A, B forment une collection "générique" (6.1)), il n'y a pas d'extension comme ci-dessus. Le premier exemple semblable est construit dans [12].

7. PRODUIT DE DEUX SURFACES DE SEVERI-BRAUER

Un *surface de Severi-Brauer* est une variété de Severi-Brauer de dimension 2.

Théorème 7.1. *Soient X, Y des surfaces de Severi-Brauer sur un (même) corps et A, B les algèbres correspondantes.*

1. *La torsion dans le groupe $\text{CH}^2(X \times Y)$ est soit triviale, soit d'ordre 3.*
2. *Si la torsion n'est pas triviale, alors*

$$(*) \quad \text{ind } A = \text{ind } B = \text{ind}(A \otimes B) = \text{ind}(A \otimes B^\circ) = 3$$

où B° est l'algèbre opposée.

3. *Si la collection A, B est "générique" (5.4) et satisfait la condition (*), alors la torsion n'est pas triviale.*

Démonstration. Si au moins une des algèbres $A, B, A \otimes B, A \otimes B^\circ$ est décomposée, il existe une algèbre C du degré 3 telle que sa classe $[C]$ dans le groupe de Brauer engendre le même groupe que $[A]$ et $[B]$ (ensemble). D'après 1.1, le groupe $\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y)$ est isomorphe dans ce cas au groupe $\text{Tors } \text{CH}^2(\text{SB}(C))$ qui est trivial par [7, corollary].

Si $\text{ind}(A \otimes B) = \text{ind}(A \otimes B^\circ) = 9$, alors les algèbres A, B sont disjointes et on peut utiliser 5.2.

Posons $Y^\circ = \text{SB}(B^\circ)$. Comme par (1.1)

$$\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y) \simeq \text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y^\circ),$$

il suffit de regarder seulement un des deux cas suivants:

- $\text{ind}(A \otimes B) = 3$ et $\text{ind}(A \otimes B^\circ) = 9$;
- $\text{ind}(A \otimes B) = 9$ et $\text{ind}(A \otimes B^\circ) = 3$.

Lemme 7.2. *Si $\text{ind } A = \text{ind } B = \text{ind}(A \otimes B) = 3$ et $\text{ind}(A \otimes B^\circ) = 9$, alors $\text{Tors } \text{G}^2\Gamma K(X \times Y) = 0$.*

Démonstration. Posons $K = K(X \times Y)$, $\bar{K} = K(\bar{X} \times \bar{Y})$. L'anneau \bar{K} est engendré par les éléments ξ, η avec les relations $(\xi - 1)^3 = 0 = (\eta - 1)^3$ (v. §2). En particulier, le groupe additif de \bar{K} est un groupe abélien librement engendré par les éléments $\xi^i \eta^j$, $i, j = 0, 1, 2$. Nous allons aussi utiliser un autre système de générateurs: $f^i g^j$, $i, j = 0, 1, 2$, où $f = \xi - 1$, $g = \eta - 1$.

Pour chaque l , le l -ième terme $\Gamma^l \bar{K}$ de la gamma-filtration de \bar{K} est engendré par les produits $f^i g^j$ avec $i + j \geq l$.

La condition du lemme implique que

$$\begin{aligned} \text{ind } A^{\otimes 2} = \text{ind } B^{\otimes 2} = \text{ind}(A^{\otimes 2} \otimes B^{\otimes 2}) = 3 \quad \text{et} \\ \text{ind}(A \otimes B^{\otimes 2}) = \text{ind}(A^{\otimes 2} \otimes B) = 9. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après 2.1, le sous-anneau $K \subset \bar{K}$ est additivement engendré par

$$1, 3\xi, 3\xi^2, 3\eta, 3\xi\eta, 9\xi^2\eta, 3\eta^2, 9\xi\eta^2, 3\xi^2\eta^2.$$

Nous allons aussi utiliser un autre système de générateurs:

$$1, 3f, 3g, 3f^2, 3fg, 3g^2, 9f^2g, 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2, 9f^2g^2 .$$

Maintenant c'est évident que l'intersection $K \cap \Gamma^3 \bar{K}$ est engendrée par

$$9f^2g, 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 \text{ et } 9f^2g^2 .$$

Pour démontrer que le groupe $G^2\Gamma K$ est sans torsion, il suffit de vérifier que les trois éléments appartiennent à $\Gamma^3 K$.

Comme $3f^2, 3g^2 \in \Gamma^2 K$ et $3g \in \Gamma^1 K$, on a:

$$9f^2g = (3f^2) \cdot (3g) \in \Gamma^3 K, \quad 9f^2g^2 = (3f^2) \cdot (3g^2) \in \Gamma^4 K .$$

L'élément resté coïncide avec une 3-ième classe de Chern:

$$\begin{aligned} c^3(3\xi\eta) &= (\xi\eta - 1)^3 = ((f+1)(g+1) - 1)^3 = (fg + f + g)^3 = \\ &= 3fg(f+g)^2 + (f+g)^3 = 6f^2g^2 + 3f^2g + 3fg^2 . \end{aligned}$$

□

Nous finissons la démonstration du théorème avec

Proposition 7.3. *Si $\text{ind } A = \text{ind } B = \text{ind}(A \otimes B) = \text{ind}(A \otimes B^\circ) = 3$, alors $\text{Tors } G^2\Gamma K(X \times Y) \simeq \mathbb{Z}/3$.*

Démonstration. Nous utilisons la notation introduite au commencement de la démonstration du dernier lemme.

Lemme 7.4. *Le sous-anneau $K \subset \bar{K}$ est maintenant engendré par 1 et $3\bar{K}$. En plus,*

$$\begin{aligned} \Gamma^1 K &= 3\Gamma^1 \bar{K} ; \\ \Gamma^2 K &= 3\Gamma^2 \bar{K} ; \\ \Gamma^3 K &\ni 3f^2g - 3fg^2, 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 ; \\ \Gamma^4 K &\ni 9f^2g^2 . \end{aligned}$$

Démonstration. L'assertion sur $\Gamma^1 K$ est triviale. L'assertion sur $\Gamma^2 K$ découle d'injectivité de $G^1\Gamma K \rightarrow G^1\Gamma \bar{K}$ ([16, lemme 6.3, (i)]); puis $9f^2g^2 \in \Gamma^4 K$ car $3f^2, 3g^2 \in \Gamma^2 K$.

Pour montrer l'assertion sur $\Gamma^3 K$, calculons la 3-ième classe de Chern

$$c^3(\xi^2\eta) = (\xi^2\eta - 1)^3 = ((f+1)^2(g+1) - 1)^3 = 27f^2g^2 + 12f^2g + 6fg^2 .$$

Puisque $9f^2g, 9fg^2 \in \Gamma^3 K$, on en conclut que $3f^2g - 3fg^2 \in \Gamma^3 K$.

Enfin, comme nous avons déjà calculé dans la preuve de 7.2,

$$3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 = c^3(3\xi\eta) \in \Gamma^3 K .$$

□

Corollaire 7.5. $\# \text{Tors } G^*\Gamma K \leq 3$.

Démonstration. Analogiquement 6.7. Maintenant, on a: $\#(\bar{K}/K) = 3^8$ et $\# \text{Coker } \alpha^* \leq 3^9$ (7.4). □

Lemme 7.6. $3f^2g^2 \notin \Gamma^3K$.

Démonstration. Définissons un homomorphisme $\phi_9 : \bar{K} \rightarrow \mathbb{Z}/9$ à la manière suivante: écrivons un élément $x \in \bar{K}$ arbitraire comme une combinaison linéaire

$$x = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} f^i g^j \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{Z},$$

posons $\phi(x) = a_{21} + a_{12} - a_{22}$ et définissons $\phi_9(x)$ comme le résidu de $\phi(x)$ modulo 9.

Comme $\phi_9(3f^2g^2) \neq 0$, il suffit de montrer que $\phi_9(\Gamma^3K) = 0$.

A priori, le groupe Γ^3K est engendré par $\Gamma^1K \cdot \Gamma^2K$, $c^3(S)$ et $c^4(S)$ où

$$S = 1, 3\xi, 3\xi^2, 3\eta, 3\xi\eta, 3\xi^2\eta, 3\eta^2, 3\xi\eta^2, 3\xi^2\eta^2.$$

Cependant, $c^4(s) = 0$ pour tout $s \in S$; on peut donc rayer $c^4(S)$ de la liste des générateurs.

Puisque

$$\Gamma^1K \cdot \Gamma^2K \subset \Gamma^1K \cdot \Gamma^1K \subset 9\bar{K} \quad (7.4),$$

on a: $\phi_9(\Gamma^1K \cdot \Gamma^2K) = 0$.

Il reste $c^3(S)$. Pour $s = 1, 3\xi, 3\xi^2, 3\eta$ et $3\eta^2$, $\phi(s)$ est déjà 0. Les calculs suivants montrent que $\phi_9(c^3(s)) = 0$ aussi pour les autres quatre éléments $s \in S$:

$$\begin{aligned} c^3(3\xi\eta) &= (\xi\eta - 1)^3 = ((f+1)(g+1) - 1)^3 = (fg + (f+g))^3 = \\ &= 3fg(f+g)^2 + (f+g)^3 = \boxed{6f^2g^2 + 3f^2g + 3fg^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^3(3\xi^2\eta^2) &= (\xi^2\eta^2 - 1)^3 = ((f+1)^2(g+1)^2 - 1)^3 = ((f^2+4fg+g^2)+2(f+g))^3 = \\ &= 12(f^2+4fg+g^2)(f+g)^2 + 8(f+g)^3 = \boxed{120f^2g^2 + 24f^2g + 24fg^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^3(3\xi^2\eta) &= (\xi^2\eta - 1)^3 = ((f+1)^2(g+1) - 1)^3 = (f(f+2g) + (2f+g))^3 = \\ &= 3f(f+2g)(2f+g)^2 + (2f+g)^3 = \boxed{27f^2g^2 + 12f^2g + 6fg^2}; \end{aligned}$$

$$c^3(3\xi\eta^2) = \boxed{27f^2g^2 + 6f^2g + 12fg^2}.$$

□

□

□

RÉFÉRENCES

- [1] Blanchet, A. *Function fields of generalized Brauer-Severi varieties*. Comm. Algebra 19.1 (1991), 97–118.
- [2] Fulton, W. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, 1984.
- [3] Fulton, W., Lang, S. *Riemann-Roch Algebra*. Springer-Verlag, 1985.
- [4] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [5] Izhboldin, O. T. *On the (non)-excellent property for function field of Severi-Brauer varieties*. Preprint.
- [6] Karpenko, N. A. *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*. Leningrad (St. Petersburg) Math. J. 2 (1991), no. 1, 119–138.
- [7] Karpenko, N. A. *On topological filtration for Severi-Brauer varieties*. Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 275–277.
- [8] Karpenko, N. A. *On topological filtration for Severi-Brauer varieties II*. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 174, 1996, 45–48.
- [9] Karpenko, N. A. *Codimension 2 cycles on Severi-Brauer varieties*. Prépublications de l'Équipe de Mathématiques de Besançon 96/40 (1996), 26 p.
- [10] Karpenko, N. A., Merkurjev, A. S. *Chow groups of projective quadrics*. Leningrad (St. Petersburg) Math. J. 2 (1991), no. 3, 655–671.
- [11] Köck, B. *Chow motif and higher Chow theory of G/P* . Manuscripta Math. 70 (1991), 363–372.
- [12] Mammone, P. *On the tensor product of division algebras*. Arch. Math. 58 (1992), 34–39.
- [13] Manin, Yu. I. *Lectures on the K -functor in algebraic geometry*. Russian Math. Surveys 24 (1969), no. 5, 1–89.
- [14] Peyre, E. *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*. Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 369–401.
- [15] Quillen, D. *Higher algebraic K -theory: I*. Lect. Notes Math. 341 (1973), 85–147.
- [16] Sansuc, J.-J. *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*. J. reine angew. Math. 327 (1981), 12–80.

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON, 16,
ROUTE DE GRAY, F-25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE
E-mail address: karpenko@math.univ-fcomte.fr