PHYSQ 124
Particules et ondes

Marc de Montigny

Chapitres

- **Cinématique à une dimension**
- **Cinématique à deux dimensions**
- **Dynamique et lois de Newton**
- **Travail et énergie**
- **Collisions et quantité de mouvement**
- **Dynamique de rotation**
- **Oscillateur harmonique simple**
- **Ondes et son**
- **Superposition d'ondes**
- **Lumière**
- **Outils mathématiques pour la physique**

Mise à jour : juillet 2007

<u>Cinématique à une dimension</u>

<u>Sections</u> <u>Page</u>

1. Rappel de Physique 20 et 30

Définitions :

- La *position* d'un objet est son emplacement, caractérisé (en une dimension) par un nombre représentant la distance entre cet objet et l'origine du système de coordonnées. Dans la suite, nous utiliserons la variable x pour représenter la position.
- Le *déplacement* d'un objet est son changement de position. Nous l'écrivons comme $\Delta x = x_2 - x_1$, où x_1 est la position initiale et x_2 la position finale. Nous verrons qu'en deux ou trois dimensions que le déplacement est un *vecteur*, c.-à-d. qu'il est défini par une grandeur et une direction.
- La *distance* parcourue par un objet correspond au chemin suivi. Elle est spécifiée par une grandeur, sans direction; il s'agit donc d'une quantité *scalaire*.

Exemple : Un patineur de vitesse participe à une course de 800 m. Pour ce faire, il doit compléter 2 tours de la patinoire. (a) Quelle est la distance parcourue par le patineur? (b) Quel est son déplacement?

Réponse : (a) Le patineur a parcouru 800 m. C'est un scalaire, car on n'indique pas dans quelle direction il va. (b) Comme le patineur revient à son point de départ, il n'y a aucun changement de position : son déplacement vaut donc zéro.

Définitions :

- Le *vecteur vitesse* d'un objet est le déplacement par unité de temps; il est déteminé par une grandeur et une direction. En anglais, on le traduit par *velocity*. Pour abréger, on utilise parfois les termes *vitesse* ou *vélocité*.
- La *vitesse scalaire*, ou, tout simplement, *vitesse*, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, est la grandeur du vecteur vitesse, c.-à-d. sans tenir compte de sa direction. On peut la voir aussi comme étant la distance par unité de temps. Les unités sont aussi en distance divisé par temps. Le terme anglais correspondant est *speed*.

Exemple : Un cheval parcourt 800 m en 80 secondes. Il suit une trajectoire circulaire et termine sa course à son point de départ. (a) Quelle est la vitesse scalaire du cheval? (b) Quelle est son vecteur vitesse, ou vélocité?

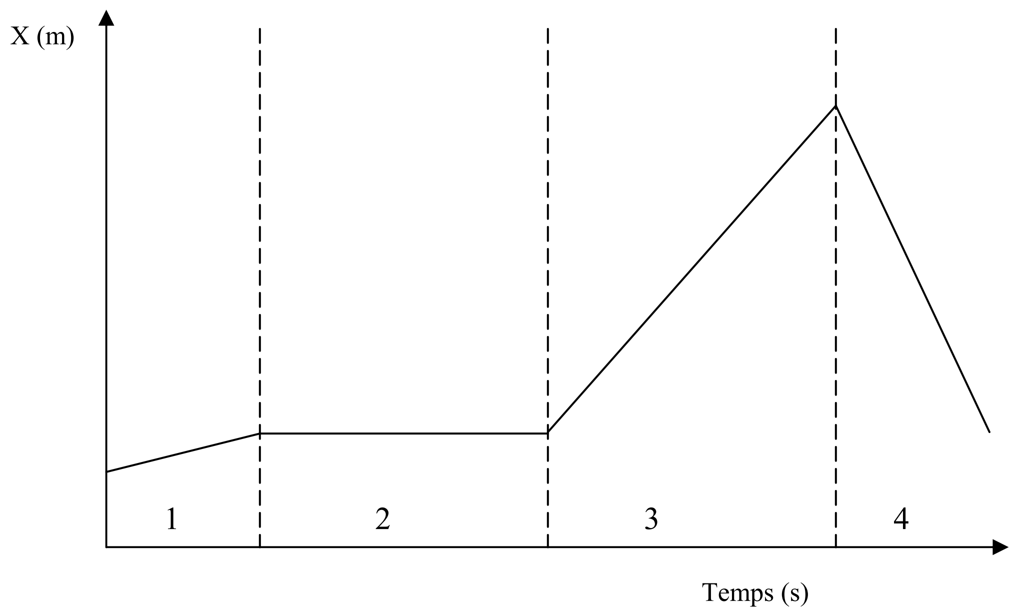
Réponse : (a) Distance parcourue = 800 m; temps = 80 secondes; Distance/temps = 10 m/s. (b) Puisque le cheval revient à son point de départ, son déplacement est zéro. Sa vélocité est aussi zéro.

Définitions :

- La *vitesse scalaire moyenne* d'un objet est la distance totale divisée par le temps total requis pour parcourir cette distance.

- La *vitesse vectorielle moyenne*, v_{moy}, est le déplacement total divisé par le temps total. Elle est caractérisée par une grandeur et par une direction.
- La *vitesse vectorielle instantanée*, v, est le déplacement divisé par un temps infinitésimal, c.-à-d. qui tend vers zéro. Elle a une grandeur et une direction.
- L'*accélération moyenne*, a_{moy}, d'un objet est le changement de vitesse instantanée divisé par le temps total requis pour effectuer ce changement de vitesse.
- L'*accélération moyenne*, a, d'un objet est le changement de vitesse instantanée divisé par le temps infinitésimal requis pour effectuer ce changement de vitesse.

Graphique de la position en fonction du temps



Que pouvons-nous trouver à partir de ce graphique?

- Position / temps = vitesse
- La pente de chaque partie du graphique indique la vitesse moyenne dans cet intervalle de temps
- Dans la section 1 : l'objet se déplace à une petite vitesse moyenne (pente peu prononcée)
- Dans la section 2 : l'obet ne se déplace pas. La vitesse et la pente sont nulles
- Dans la section 3 : l'objet se déplace à une vitesse plus grande que celle dans la section 1
- Dans la section 4 : l'objet a une vitesse négative.

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

1. Expliquez la différence entre déplacement et distance. Lequel tient compte de la direction du mouvement?

2. Expliquez la différence entre la vélocité moyenne et la vitesse moyenne. Lequel ne tient pas compte de la direction du mouvement?

3. Si un graphique de la position en fonction du temps montre une pente négative, cela signifie que la vitesse est…

4. Si un graphique de la position en fonction du temps montre une courbe bizarre, cela signifie que la vitesse est…

5. Si le graphique de vitesse en fonction du temps est une droite horizontale, cela signifie que l'accélération est…

6. Si le graphique de la position en fonction du temps est une droite horizontale, cela signifie que l'objet…

7. Si la vélocité, ou vecteur vitesse, est zéro, alors le déplacement est…

8. Pourquoi la valeur de l'accélération due à la gravité est-elle souvent donnée par une valeur négative?

9. Une distance peut-elle être négative?

10. Une vélocité peut-elle être négative?

Réponses : 1. déplacement; 2. vitesse moyenne; 3. constante et négative; 4. variable; 5. nulle; 6. ne bouge pas, déplacement est zéro; 7. nul; 8. Parce que le déplacement positif est dans la direction opposée; 9. non, positif ou nul; 10. oui.

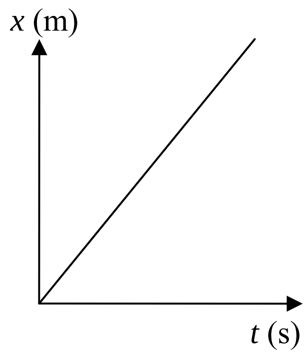
Auto-évaluation

Assurez-vous de bien maîtriser les points ci-dessous :

- Expliquer la différence entre vitesse et vélocité
- Expliquer la différence entre déplacement et distance
- Interpréter une vélocité négative
- Interpréter un déplacement négatif
- Tracer et interpréter un graphique de la position en fonction du temps
- Tracer et interpréter un graphique de la vitesse en fonction du temps
- Déterminer la vitesse à partir d'un graphique de la position en fonction du temps
- Trouver l'accélération à partir d'un graphique de la vitesse en fonction du temps

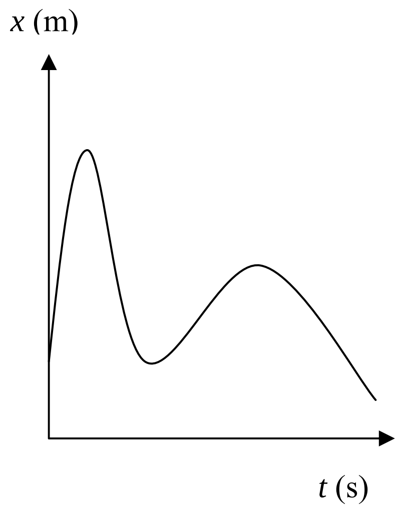
3. Analyse graphique

Graphique de la position en fonction du temps



$$\text{pente } m = \text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

Vitesse constante

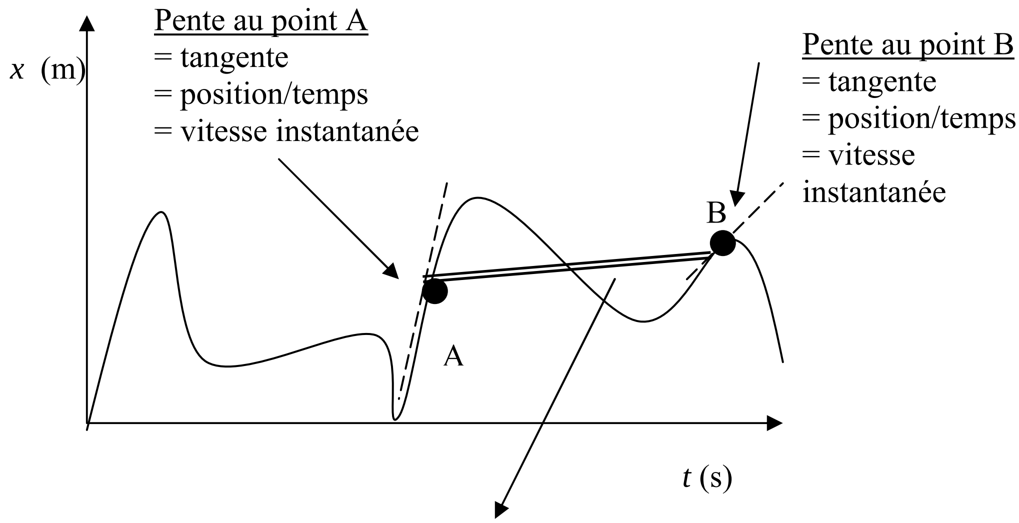


Mais comment définir la pente avec le graphique ci-contre?
Réponse : vitesse instantanée

Définition : La *vitesse instantanée* est le changement de position pendant un interevalle de temps qui approche zéro. Elle joue un rôle important lorsque la vitesse n'est pas constante, et qu'on ne peut pas trouver la pente. Pour la définir géométriquement : (1) on choisit deux points sur la courbe de la position en fonction du temp, comme si on trouvait la pente; (2) on diminue ensuite le temps entre les points jusqu'à ce qu'il soit infinitésimal, c.-à-d. infiniment petit, ou presque zéro, (ce concept s'appelle la *limite*); (3) on calcule la vitesse instantanée avec la relation

$$v_{\text{instantanée}} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ce concept est illustré par le schéma ci-dessous :



Vitesse moyenne (utilisant les points A et B)

$$m = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{\text{position (B)} - \text{position (A)}}{\text{temps(B)} - \text{temps (A)}}$$

On peut donc résumer la différence entre vitesse moyenne et vitesse instantanée comme suit :

- *Vitesse moyenne* : on utilise deux points et on trouve la pente du graphique position/temps.
- *Vitesse instantanée* : on utilise un seul point et on prend la limite à ce point.

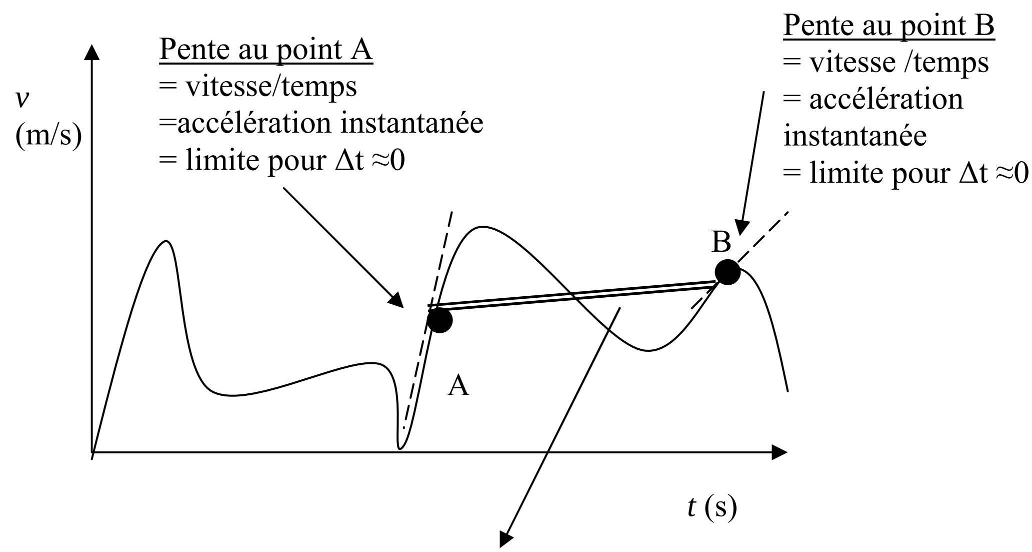
<u>Graphique de la vitesse en fonction du temps</u>

On utilise une démarche similaire à celle du graphique de la position en fonction du temps pour trouver la pente du graphique.

<u>Définition :</u> L'*accélération* est donnée par la pente du graphique de la vitesse en fonction du temps. Si l'accélération n'est pas constante, on a une situation semblable au cas de la vitesse : on utilise alors *l'accélération instantanée*, donnée par

$$a_{\text{instantanée}} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\ \text{vitesse}}{\Delta\ \text{temps}}$$

Le graphique suivant illustre ce concept :



Vitesse moyenne (utilisant les points A et B)

$$m = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{\text{vitesse (B)} - \text{vitesse (A)}}{\text{temps (B)} - \text{temps (A)}}$$

Remarque : Un *ralentissement*, ou *décélération*, signifie une réduction de la *grandeur* de la vitesse. Ceci se produit lorsque le signe de *a* est opposé au signe de *v*. Ainsi, accélération négative n'est pas synonyme de ralentissement. Ceci est illustré dans le tableau suivant :

$\vec{a}$ est +	$\vec{a}$ est +	$\vec{a}$ est –
$\vec{v}$ est +	$\vec{v}$ est –	$\vec{v}$ est –
	Ou	
	$\vec{a}$ est –	
	$\vec{v}$ est +	
accélération + vitesse +	accélération + vitesse – (ou vice versa)	accélération - vitesse –
accélération	**décélération**	**accélération**

4. Équations de la cinématique à accélération constante

La cinématique est l'étude du lien entre différentes quantités physiques liées au temps et au déplacement, telles que la vitesse et l'accélération. Nous verrons que ces quantités ont des équivalents angulaires pour des mouvements de rotation. Dans le cours, nous nous intéresserons aux cas de l'*accélération constante*. Dans le cas d'une particule, considérons les quantités (variables et constantes) suivantes :

a : constante (ne dépend pas du temps)
x_o : position au temps $t = 0$ s.
x_t : position au temps t.
v_o : vitesse au temps $t = 0$ s
v_t : vitesse au temps t.

Comme la particule a une accélération constante, l'accélération instantanée à un temps précis est aussi égale à l'accélération moyenne. On peut donc dire que :

(1) $$a = \frac{v - v_o}{t}$$

En isolant v, on obtient la première équation de la cinématique:

(2) $$v = v_0 + at$$

De plus, comme la vitesse varie de façon uniforme avec le temps, la vélocité moyenne à n'importe quel temps t est égale à la moyenne de la vitesse initiale et la vitesse finale :

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v_f}{2}$$

On peut combiner cette équation et la définition de vitesse,

$$v = \frac{\Delta x}{t}$$

pour obtenir l'expression suivante pour le déplacement :

(3) $$\Delta x = \frac{1}{2}(v_o + v)t$$

En combinant les équations (2) et (3), on obtient une autre équation de la cinématique

(4) $$\Delta x = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

On peut aussi trouver une expression ne contenant pas la variable temps

$$(5) \qquad v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$$

Chacune des équations comporte des avantages :

- équation (2) : v en fonction de t (pas de Δx)
- équation (4) : Δx en fonction de t (pas de v)
- équation (5) : v en fonction de Δx (pas de t)

5. Chute libre

Définition : On dit qu'un objet est en *chute libre* (en anglais, *freely falling*) si la seule force agissant sur cet objet est la force de gravité. Par exemple, on ne parle pas de chute libre lorsqu'on tient compte de la friction.

Les équations de la cinématique peuvent donc être modifiées en tenant compte du fait que l'accélération est due à la gravité (9.81 m/s^2), que la force de la gravité pousse toujours un objet vers le centre de la terre, c.-à-d. verticalement, quand on se trouve près de la surface terrestre.

L'équation (2) devient donc

$$(6) \qquad v = v_o - gt$$

l'équation (4) devient

$$(7) \qquad y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

et l'équation (5) se lit

$$(8) \qquad v^2 = v_o^2 - 2g(y - y_o)$$

Remarques :

- le signe négatif devant g provient de la convention selon laquelle l'axe des y est *positifs vers le haut*.
- faites attention de ne pas prendre $g = -9.8\ \text{m/s}^2$, car le signe est déjà inclus dans les équations. Ceci est une erreur commune; évitez-la!

6. Exercices résolus

Exercice 1 : Un élève décide de s'amuser en lançant son livre de physique par la fenêtre du laboratoire, située à 50 m du sol, avec une vitesse initiale de 20 m/s vers le haut.

a) Après combien de temps le livre atteindra-t-il sa hauteur maximale?

On sait que
$v_o =$ m/s
et que la vitesse à la hauteur maximale est
$v =$ m/s
En utilisant
$v = v_o - gt$, et en isolant le temps, on obtient que
$t =$ s

b) Quelle hauteur maximale le livre atteindra-t-il?

En utilisant l'équation
$$y = y_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$
on obtient :
$y =$

c) le temps auquel le livre aura atteint une hauteur de 50 m?

En utilisant l'équation
$$y = y_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$
et en substituant
y = m
g = m/s^2
et $v_o =$ m/s

On obtient
$(20\text{-}4.905t)\ t = 0$
On obtient donc une hauteur de 50 mètres si :
t = 0 (au point de départ)
et à t = s

d) la vitesse du livre lorsque sa hauteur est de 50 m?

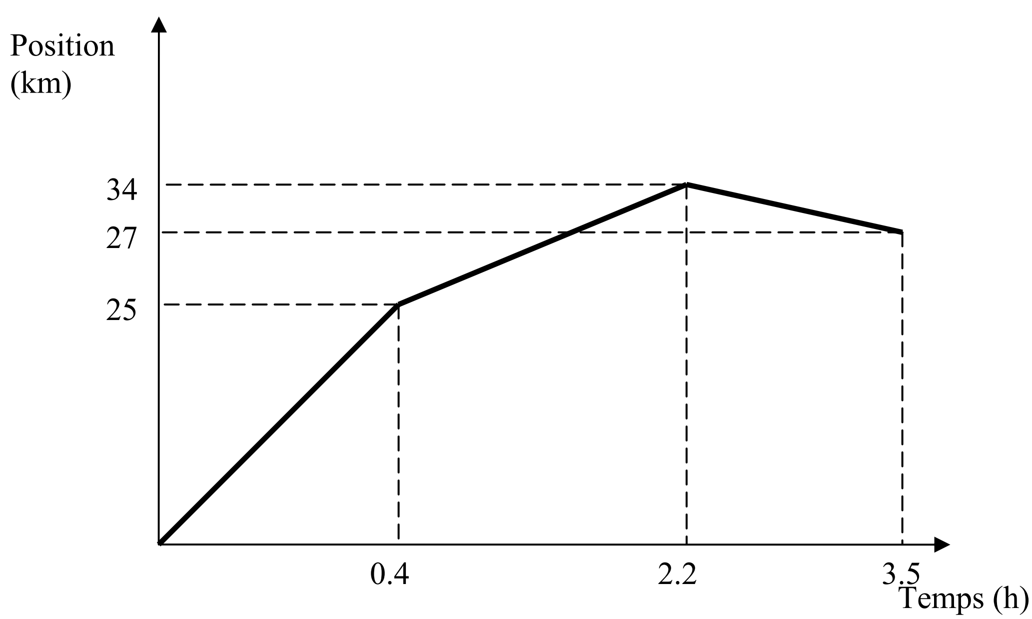
En utilisant l'équation
$v = v_o - gt$
et en substituant
$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$
$v_0 = 20\ \mathrm{m/s}$
et t =   s
On obtient :
$v =$

e) la vitesse et la hauteur du livre au temps t = 5s?

Pour trouver la vitesse du livre
on utilise l'équation
$v = v_o - gt$
$v =$

Pour trouver la hauteur du livre
on utilise l'équation
$y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$
$y =$

Exercice 2 : Utilisez le graphique suivant pour répondre aux questions portant sur l'analyse graphique de vitesse et d'accélération.



a) Quelle est l'accélération moyenne?

En sachant que

$$v_f = \bar{v}_f = \frac{-7.5km}{1.4h} \cong -5.4 \text{ km/h}$$

$$v_i = \bar{v}_i = 2.5 \text{ km/h}$$

On obtient alors que

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{-5.4 \text{ km/h} - 2.5 \text{ km/h}}{3.5 \text{ h}} \cong -8.7 \text{ km/h}^2$$

b) Quelle est la vitesse moyenne?

Puisque

$$\bar{v} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{27 \text{ km} - 0 \text{ km}}{3.5 \text{ h} - 0 \text{ h}} \cong 7.7 \text{ km/h}$$

7. Test formatif

1. Si la vélocité d'un objet est positive, son accélération peut-elle être égale à zéro?
2. Les équations de la cinématique peuvent-elle être utilisées si l'accélération est zéro?
3. La vélocité instantanée d'un objet à un temps t peut-elle être plus grande en magnitude que la vélocité moyenne?
4. L'auto A roule de Toronto vers Montréal à une vitesse de 25 m/s, alors que l'auto B roule de ThunderBay vers Vancouver à une vitesse de 25 m/s. La vélocité de l'auto A est-elle égale à la vélocité de l'auto B? Expliquez.
5. Décrivez le mouvement d'un objet ayant une vélocité nulle et une accélération positive.
6. Un voyageur conduit d'une ville à une autre à différentes vitesses. Il conduit à 80 km/h durant 30 minutes, à 100 km/h pendant 12 minutes et à 40 km/h durant 45 minutes. De plus, le voyageur s'arrête pour manger durant 15 minutes. Trouvez la vitesse moyenne du voyageur et la distance entre les deux villes.
7. Une balle est lancée vers le haut. Déterminez la vélocité et l'accélération de la balle à son point maximum.
8. Un avion doit avoir une vitesse d'au moins 50 m/s pour pouvoir décoller. Quelle doit être l'accélération de l'avion si la piste mesure 600 m de longueur?
9. Une voiture roule à 50 km/h pendant 30 minutes et ensuite à 60 km/h pendant 2 heures. Trouvez la distance parcourue et la vitesse moyenne de la voiture.
10. Une voiture sport a une accélération de 3,3 m/s2. Quelle est la distance parcourue quand sa vitesse augmente de 0 à 10 m/s et de 10 à 33.3 m/s?
11. Quelle est l'accélération d'une voiture roulant initialement à une vitesse de 20 m/s et qui s'immobilise sur une distance de 20 m?

12. Un joueur de Baseball prend 0.1 seconde pour lancer une balle. La balle quitte sa main avec une vitesse de 30 m/s. Quelle est son accélération?
13. Une balle est lancée verticalement vers le bas avec une vitesse initiale de 12 m/s. Quelle distance a-t-elle parcourue après 2 secondes?
14. Une balle est lancée vers le haut avec une vitesse initiale de 12 m/s. Quelle est sa hauteur après 1 seconde? Après 2 secondes?
15. L'*Empire State Building* mesure 448m de hauteur. Combien de temps faut-il à un objet lâché du sommet pour toucher le sol? Quelle sera la vitesse finale de l'objet?

Réponses

1. oui, si la vélocité reste constante
2. oui, mais pas si l'accélération n'est pas constante
3. oui
4. non, puisque la vélocité est un vecteur, les deux vélocités doivent être égales en grandeur et en direction. Cela n'est pas le cas ici puisque les deux autos roulent dans des directions opposées.
5. l'objet a bougé et est revenu à son point de départ. Comme son déplacement total est zéro, alors la vélocité est zéro.
6. la distance entre les deux villes est 90 km et la vitesse moyenne est 17.25 m/s
7. la vélocité de la balle est zéro et son accélération aussi
8. 2.08 m/s2
9. distance parcourue est 175 km, vitesse moyenne est 19.44 m/s
10. 15.15 m
11. -10 m/s2
12. 300 m/s2
13. 43.6 m
14. 7.1 m après 1 seconde et 4.4m après 2 secondes
15. 9.6 s et 93.6 m/s

Cinématique à deux dimensions

1. Rappel de Physique 20 et 30

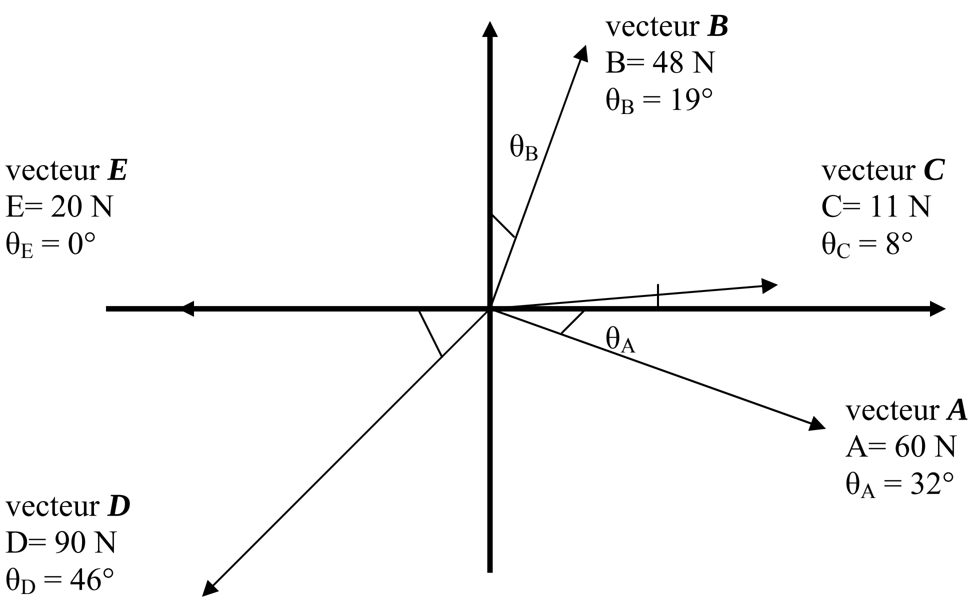
Cette section porte sur les concepts mathématiques suivants :

- théorème de Pythagore
- vecteurs et scalaires
- addition et soustraction de vecteurs
- multiplication d'un vecteur par un scalaire
- règle de la main droite

Il est donc suggéré de relire le chapitre *Outils mathématiques pour la physique*, plus particulièrement, les sections 8 à 11.

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

Répondez aux questions ci-dessous à l'aide des vecteurs tracés dans le plan cartésien suivant.



1. Calculez le vecteur résultant et son angle pour l'addition de :
   a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$
   b) $\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}$
   c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$

2. Calculez le vecteur résultant et son angle pour la soustraction de :
   a) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$
   b) $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$
   c) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}$

3. Calculez le vecteur résultant et son angle pour le produit :
   a) $15\boldsymbol{E}$
   b) $6\boldsymbol{B}$
   c) $-1/3\ \boldsymbol{A}$

4. Calculez le vecteur résultant pour le produit scalaire de :
   a) $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$
   b) $\boldsymbol{E}\bullet\boldsymbol{D}$
   c) $\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{A}$

5. Calculez le vecteur résultant et son orientation pour le produit vectoriel de :
   a) $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}$
   b) $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$
   c) $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}$
   d) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

<u>Auto-évaluation</u>

Assurez-vous de bien maîtriser les concepts suivants :

- utiliser le théorème de Pythagore sans difficultés
- multiplier un vecteur par une constante k et je sais que cela ne changera que sa magnitude (et non son orientation)
- calculer un produit scalaire
- comment additionner tous les vecteurs dans le plan cartésien ci-haut et trouver le vecteur résultant
- comment trouver le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle
- trouver les signes appropriés de chacune des composantes d'un vecteur n'est pas un problème pour moi
- différencier un vecteur d'un scalaire
- quand utiliser un vecteur et quand utiliser un scalaire
- que le produit scalaire peut être visualisé comme étant l'aire du parallélogramme formé des deux vecteurs multipliés.

3. Équations de la cinématique à accélération constante

Les problèmes de cinématique à deux dimensions peuvent être résolus de manière analogue aux problèmes à une dimension. La seule différence est qu'il faut séparer le mouvement en composantes et ensuite appliquer les équations de la cinématique à chacune d'elles.

Équations de la cinématique à une dimension		Équations de la cinématique à 2 dimensions (*x* et *y*)
Équation (2)		Équations (2.x et 2.y)
$v = v_o + at$	$\longrightarrow$	$v_x = v_{ox} + a_x t$ $v_y =$
Équation (4)		Équations (4.x et 4.y)
$\Delta x = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$	$\longrightarrow$	$\Delta x =$ $\Delta y =$
Équation (5)		Équations (5.x et 5.y)
$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$	$\longrightarrow$	$v_x^2 =$ $v_y^2 =$
Déplacement		Déplacement (x et y)
$\vec{r}$	$\longrightarrow$	$\Delta r = \vec{r}_f - \vec{r}_i$
Vitesse moyenne		Vecteur vitesse moyenne (x et y)
$\bar{v} = \frac{\bar{r}}{t}$	$\longrightarrow$	$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \Rightarrow \bar{v}_x = \frac{r_x}{t}$ $\Rightarrow \bar{v}_y = \frac{r_y}{t}$

Vélocité instantanée

$$v_{\text{instantanée}} = \lim_{t \to 0} \frac{r}{t}$$

$\longrightarrow$

Vélocité instantanée (x et y)

$$v_{\text{instantanée}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Accélération moyenne

$$\bar{a} = \frac{\bar{v}}{\text{temps}}$$

$\longrightarrow$

Accélération moyenne (x et y)

$$\bar{a} = \frac{\Delta\,\bar{v}}{\Delta\ \text{temps}} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_x = \frac{\bar{v}_x}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a}_y = \frac{\bar{v}_y}{t}$$

Accélération instantanée

$$a_{\text{instantanée}} = \lim_{t \to 0} \frac{\bar{v}}{t}$$

$\longrightarrow$

Accélération instantanée (x et y)

$$a_{\text{instantanée}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

<u>4. Mouvement d'un projectile</u>

Le mouvement d'un projectile est un exemple concret relativement simple d'application des équations de la cinématique à accélération constante en deux dimensions.

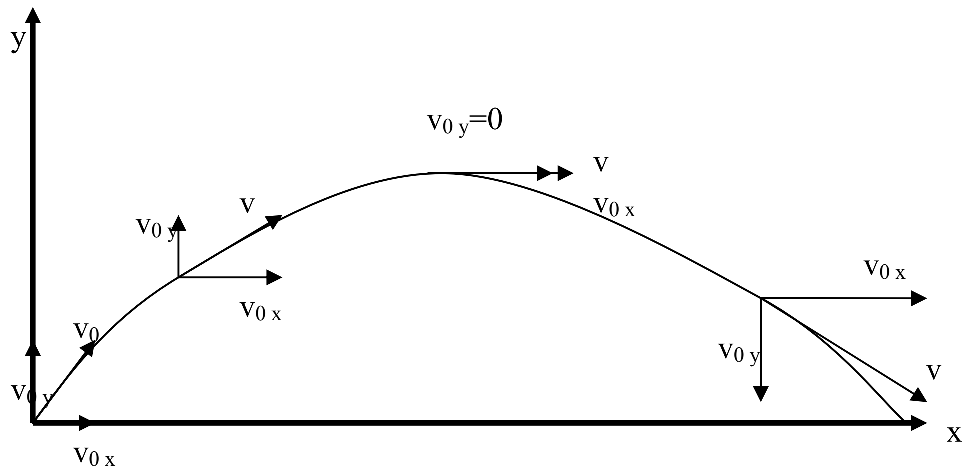
Dans cette section, on néglige la résistance de l'air, de sorte que seule l'accélération gravitationnelle agit sur le projectile. Le vecteur d'accélération est donc :

$$\vec{a} = (0, -g) \quad \Rightarrow \vec{a}_x = 0 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \vec{a}_y = -9.81 \text{ m/s}^2$$

Les mouvements vertical et horizontal sont totalement indépendants l'un de l'autre : la composante horizontale de la vitesse est constante, alors que la composante verticale se comporte exactement comme la chute libre à une dimension.

La figure suivante illustre la variation de la vitesse durant le mouvement d’un projectile

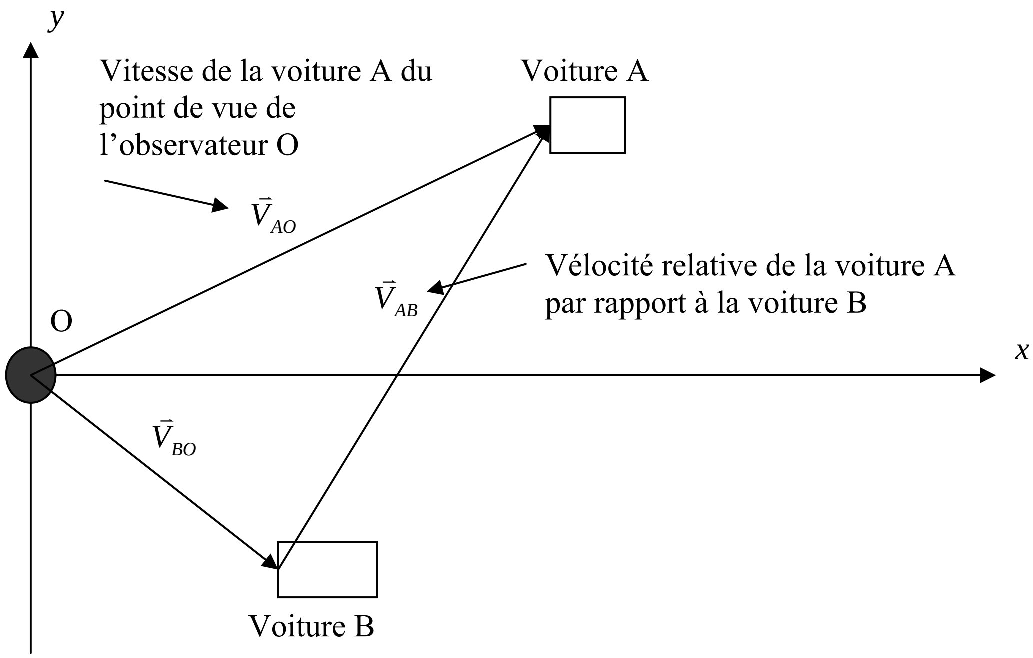


<u>5. Vitesse relative</u>

Le concept de vitesse relative fait partie intégrante du principe de relativité. Quoique que popularisé par Einstein il y a une centaine d’années, le principe en soit date de plus longtemps et est même assez naturel. En réalité, Einstein n’a pas modifié le principe, mais plutôt la forme des transformations utilisées dans le cadre de ce principe. Le *principe de relativité* stipule que les lois du mouvement ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé. Par exemple, nous pouvons transformer le système par une rotation ou un déplacement, par un changement de synchronisation, etc. Évidemment, les valeurs des coordonnées dépendent des systèmes, mais pas les conséquences physiques. Par exemple, le temps de chute d’un objet est le même que l’on fasse les calculs en centimètres ou en pouces.

Lorsque différents systèmes de référence, ou observateurs, disponibles pour une même mesure, sont en mouvement relatif les uns par rapport aux autres, la *vitesse relative* entre deux systèmes est le vecteur vitesse d’un observateur par rapport à un autre. La vitesse relative peut être visualisée à l’aide de vecteurs.

Par exemple, considérons les vitesses de deux voitures A et B vues par un observateur O.



Nous utilisons trois vecteurs reliés par une équation :

$\vec{V}_{AB}$: vélocité de la voiture A vue par la voiture B

$\vec{V}_{AO}$: vélocité de la voiture A vue par l'observateur O

$\vec{V}_{BO}$: vélocité de la voiture B vue par l'observateur O

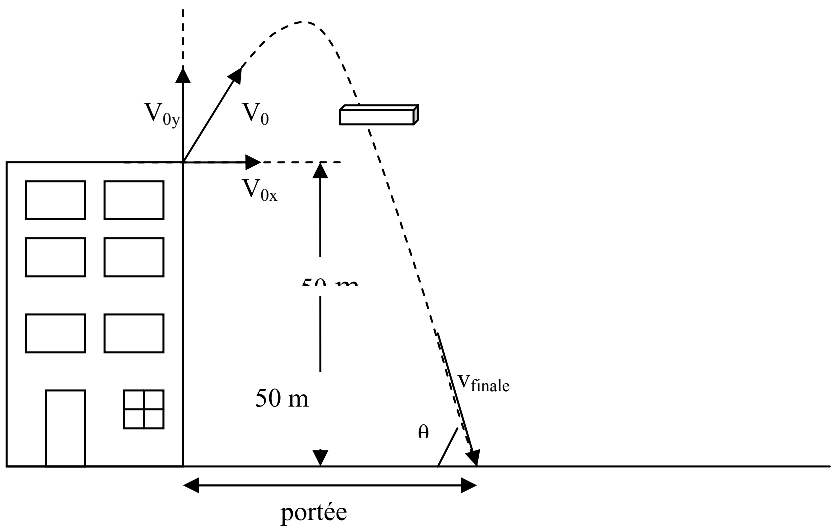
On obtient donc l'équation :

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_{AO} - \vec{V}_{BO} = \vec{V}_{AO} + \vec{V}_{OB}$$

<u>Remarque</u> : si le système de référence n'est pas explicitement mentionné, vous pouvez supposer que la Terre est le système de référence utilisé.

<u>6. Exercices résolus</u>

1. Un étudiant monte sur le toit de sa maison, à 50 mètres au-dessus du sol, et lance son livre de physique à une vitesse initiale de 20 m/s à un angle de 10° par rapport à la verticale. Trouvez…



a) le temps auquel le livre de physique atteindra sa hauteur maximale

On commence par décomposer la vitesse initiale

$v_{ox} = (20\text{ m/s})\cos 80^\circ =$ m/s (constante)

$v_{oy} = (20\text{ m/s})\cos 80^\circ =$ m/s

En sachant qu'à sa hauteur maximale, le livre de physique a $v_y = 0$ m/s, on peut utiliser l'équation

$v_y = v_{oy} - gt$

$0 = 19.70\text{ m/s} - (9.81\text{ m/s}^2)\,t$

en isolant t, on trouve que

$t =$ s

b) la hauteur maximale atteinte par le livre de physique

Puisqu'on cherche la hauteur maximale, on utilise l'équation en y

$y = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$

Sachant que

t = 2.008s (de la partie a),

$v_{oy} =$ m/s,

$g = 9.81\text{ m/s}^2$

$y_o =$ m (puisque le livre est lancé du toit de la maison)

on peut utiliser l'équation

$y = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$

et on trouve que

y = m

c) les temps auxquels le livre de physique sera situé à 50 mètres de hauteur

On commence d'abord par trouver à quel temps y = 0 m

$y = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$

50 = d'ou $0 = t(19.7 - \frac{1}{2}9.81t)$

En résolvant pour t, on obtient

$t = 0$ s et $t = 4.02$ s

Le livre repassera donc a 50 m à $t = 4.02$ s.

On sait que le livre de physique est lancé du toit de la maison situé à 50 m du sol. On a donc t (50 m) = 0 s.

De plus, on sait que le livre prendra 2.008 s pour atteindre sa hauteur maximale. Il prendra donc le même temps pour redescendre au sol.

Ainsi, t (50 m) $= 2 \times 2.008$ s = 4.016 s

d) la vitesse du livre de physique quand ce dernier est à 50 m de hauteur

Puisqu'on connaît v_{oy} au temps t = 0 s, on ne doit pas calculer la vitesse à ce point.

Au temps t = 4.016s, on a donc :

$v_y =$

On cherche $\vec{v}$, et non v_y. On utilise donc

$\vec{v} = (v_x, v_y)$

puisque $v_x = 3.47$ m/s et est constant

et que nous avons calculé que $v_y = -19.70$ m/s,

alors,

$\vec{v} = (3.47, -19.70)$

e) la portée du livre de physique et l'angle avec lequel il frappera le sol

Nous savons maintenant qu'à

$y = 0$ m, $t =$ s

Quel est la valeur de x correspondant à ces valeurs de y et t?

on a

$x = x_o + v_{ox}t$

puisque $x_o =$, $t =$ s et $v_{ox} =$ m/s,

$x =$ m

ce qui est la portée (ou la valeur de x pour laquelle $y = 0$)

Pour ce qui est de l'angle, on sait que :

$v_x = 3.47$ m/s (vitesse finale en x quand le livre frappe le sol)

$v_y = v_{oy} - gt =$

puisque

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-}{3.47}$$

alors,

$\theta =$

7. Test formatif

1. Une pierre jetée d'un pont touche la surface de l'eau après 2.5s. Quelle est sa vitesse finale et la hauteur du pont?
2. Une balle est lancée vers le haut. Quelle doit être sa vitesse initiale si on veut qu'elle atteigne une hauteur maximale de 40m?
3. Une pierre est lâchée du sommet d'une falaise. Quelle est sa vitesse après 3 secondes?
4. Si la vitesse initiale d'un projectile double, comment sa portée est-elle affectée?
5. Un obus est tiré à un angle d'élévation de 40°, à une vitesse de 300 m/s. Quelle est la portée de l'obus et son temps de parcours (pour toucher le sol)?
6. Un bateau traverse une rivière en s'alignant directement vers le nord, et en se déplaçant à une vitesse de 10 km/h par rapport à l'eau de la rivière. L'eau de la rivière a une vélocité de 5 km/h alignée vers l'est. Quelle est la vélocité du bateau pour un observateur situé sur une des rives de la rivière?
7. L'eau d'un fleuve a une vitesse de 3 m/s vers l'est. Un paquebot voyage à une vitesse de 4 m/s vers le sud par rapport au fleuve. Quelle est la vélocité du paquebot pour un observateur situé sur la rive nord du fleuve?
8. Un journaliste sportif affirme qu'une voiture de Formule 1 prend une courbe avec une vitesse constante de 200 km/h. Un physicien écoutant le journaliste remarque une grave erreur. Laquelle?

9. Un vecteur A peut-il avoir une composante plus grande que sa longueur?
10. Est-il possible d'additionner un vecteur et un scalaire?
11. En quelles circonstances un vecteur aurait-il des composantes égales à sa longueur?
12. On additionne deux vecteurs de grandeurs différentes. Leur somme peut-elle être zéro?
13. Deux fermiers tirent un mulet têtu refusant de bouger. Le premier fermier tire sur le mulet avec une force de 80 N à l'aide d'une corde faisant un angle de 15° avec l'animal. Le deuxième fermier tire aussi sur l'animal avec une force de 120 N, mais sa corde fait un angle de 30°avec l'animal. Quelle est la force que le mulet doit exercer s'il veut s'entêter à refuser de bouger?
14. Un projectile est lancée du haut d'une falaise avec un angle de 30° (avec l'horizon) et une vitesse initiale de 60 m/s. Quelle est la hauteur maximale du projectile si la falaise mesure 132 m de hauteur?
15. Un athlète accomplit un saut en longueur. Il quitte le sol avec un angle de 20° avec l'horizontale et à une vitesse de 11 m/s. Quelle est la hauteur maximale qu'il atteindra et combien de temps cela lui prendra-t-il?
16. Un apprenti-scientifique décide de s'amuser en faisant décoller des fusées en carton. Si la fusée prend 2.1 seconde pour atteindre sa hauteur maximale, à quel temps touchera-t-elle le sol?
17. Un humain et un astronaute temporairement sur la lune décident de faire une compétition. L'humain lance un projectile sur la terre, et l'astronaute fait la même chose sur la lune. Qui gagne (i.e la plus grande portée)?

Réponses

1. 24.5 m/s et 30.6 m
2. 28 m/s
3. 29.4 m/s
4. 4 fois plus grande
5. 9044 m, 39 s
6. 11.2 km/h, 26.6° à l'est du nord
7. 5 m/s, 53.1° au sud de l'est
8. à trouver
9. non
10. non
11. à trouver
12. oui
13. Fx=-80.71N, Fy=-26.25N
14. 177.87 m par rapport au sol
15. 0.722 m de hauteur, 0.384 s
16. 4.2 secondes
17. le projectile sur la lune a une plus grande portée, donc l'astronaute gagne.

Dynamique et lois de Newton

1. Rappel de Physique 20 et 30

Il est suggéré de revoir les sections 7 à 10 du chapitre *Outils mathématiques pour la physique* en parallèle avec la lecture du présent chapitre.

Définition : Une *force* est présente si on tire ou pousse sur un objet. Tout objet qui bouge le fait sous l'action de forces.

Forces déjà rencontrées en Physique 20/30

- *forces directes* : poussée ou traction
- *force d'un ressort* : système masse-ressort
- *force de friction (frottement)* : système masse-ressort et applications diverses
- *force gravitationnelle* : poids d'un astronaute sur différentes planètes, problèmes d'astrophysique et applications.
- *tension* : problèmes de bloc suspendu à une corde, tirant une corde, poulies etc…

Les trois lois de Newton :

Newton a identifié trois lois qui déterminent le mouvement des objets.

Première loi : Un objet a une tendance à bouger à vitesse constante ou à conserver l'orientation et la grandeur de sa vitesse à moins qu'une force agisse sur lui.

Deuxième loi : La somme des forces exercées sur un objet est proportionnelle à la masse de l'objet et à son accélération.

$$\sum F = ma$$

où m est la masse de l'objet (en kg) et a est l'accélération de l'objet (en m/s^2).

Troisième loi : Lorsque deux objets interagissent, la force exercée par l'objet A sur l'objet B est égale à la force exercée par l'objet B sur l'objet A.

Si un objet ne bouge pas, alors les forces agissant sur lui sont en équilibre (i.e. la force nette = 0, ou encore, l'addition de tous les vecteurs de force agissant sur l'objet est zéro).

Définition : La *loi de Hooke* est la relation linéaire entre la force F_{res} exercée par un ressort sur une masse et l'étirement du ressort x hors de sa position d'équilibre. La constante de proportionnalité est appelée *constante d'élasticité* du ressort k.

$$F_{\text{res}} = -kx$$

où k est la constante d'élasticité du ressort (en N/m) et x est l'étirement du ressort (en m).

Le signe implique que la force est exercée dans la direction opposée au déplacement x. Habituellement, cette loi est utilisée si l'objet se déplace horizontalement ou verticalement.

Définition : Le *poids* W d'un objet de masse m est la force gravitationnelle agissant sur cet objet. Cette force est donnée par la relation $W = mg$ avec $g = 9.81$ m/s^2.

Le mouvement circulaire

La formule de vitesse sous forme rotationnelle est un cas spécifique de l'équation v = d/t utilisée en cinétique. Elle est exprimée comme étant

$$v = \frac{2\pi\, r}{T}$$

L'accélération centripète existe lorsque la vitesse d'un objet n'est pas constante. Dans un tel cas, on utilise

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Selon la 2^e loi de Newton, la présence d'une accélération implique la présence d'une force. Il en est de même pour le mouvement circulaire. S'il existe une accélération centripète, il existe donc aussi une force centripète causant l'objet à bouger suivant une trajectoire circulaire. L'existence d'une force centripète apporte aussi la force centrifuge. Cette dernière n'est qu'une force fictive puisque, selon les lois de Newton, aucune force n'est requise pour garder en mouvement un objet qui bouge déjà. Cependant, une force est requise pour faire dévier l'objet de sa trajectoire linéaire, c'est la force centrifuge.

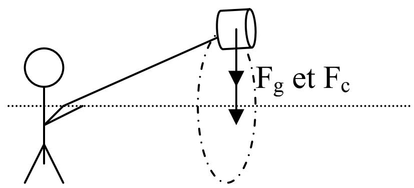
Définition : la *force centripète* est la force tirant l'objet en rotation vers le centre de la trajectoire circulaire.

Définition : la *force centrifuge* est une force *fictive* (c.-à-d. non réelle) observée dans un *système de coordonnées accéléré* et qui pousse un en direction opposée au centre de la trajectoire circulaire.

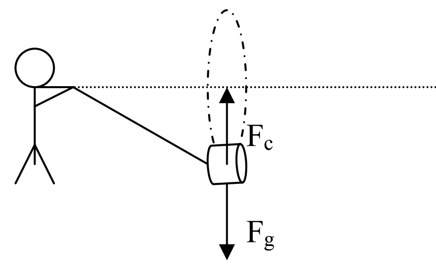
Un cas particulier : la trajectoire circulaire verticale

Dans certains cas, la trajectoire circulaire n'est pas orientée horizontalement, mais plutôt verticalement. Par exemple, lorsqu'une personne fait tourner un sceau d'eau au bout d'une corde ou quand un athlète pratique le lancer du marteau. Puisque la deuxième loi de Newton cite que la somme des forces agissant sur un objet est égale au produit de sa masse et de son accélération, il doit en être de même pour la force centripète.

Si la trajectoire de l'objet est orientée verticalement, la magnitude de la force centripète varie selon la position de l'objet. Conséquemment, le diagramme de forces et la force nette varieront. Prenons deux cas particuliers :



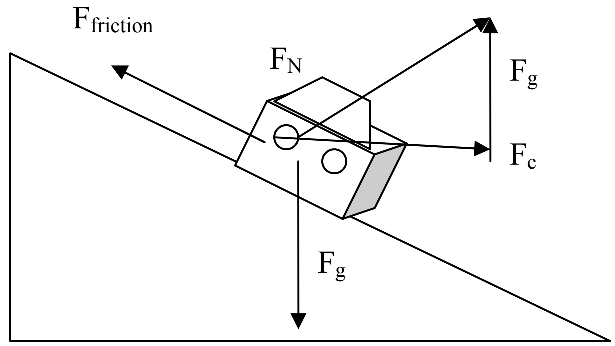
Lorsque l'objet est au point le plus haut de sa trajectoire, la force centripète tire l'objet vers le centre et la force gravitationnelle tire l'objet également dans la même direction. La force nette sera donc plus grande en magnitude.



Ici, comme les 2 forces pointent dans des directions opposées, la force nette est moins grande en magnitude

Les courbes relevées (*banked curves*)

Les courbes relevées impliquent l'interaction de plusieurs forces qui vous sont déjà connues; à savoir la force gravitationnelle, la force normale, la force de friction et la force centripète. La méthode la plus facile pour résoudre les problèmes de courbes relevées est celle du diagramme de forces. En fait, le diagramme de force pour une courbe relevée est identique à celui d'un plan incliné.



Par le diagramme, on voit que la somme de F_N et de F_g est égale à la force centripète. Ainsi, l'angle entre F_N et F_g est le même que celui du plan incliné. On obtient donc

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

où v est la vitesse (m/s) et *r* est le rayon de la courbe (m)

La force gravitationnelle

La loi de gravitation universelle cite que chaque particule de l'univers en attire une autre. La force entre toutes les particules est appelée la force gravitationnelle. Elle est définie par :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des 2 objets (kg)
r est la distance entre les centres des 2 objets (m)
G est la constante gravitationnelle ($6.67\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)

La force gravitationnelle sera infiniment petite entre 2 particules de faibles masses comme des électrons et des protons. Cependant, elle sera très importante entre 2 objets de grandes masses tels que des planètes et des lunes.

Les lois reliant les forces entre les objets de grandes masses ont été énoncées par Kepler. Elles portent sur les mouvements des planètes.

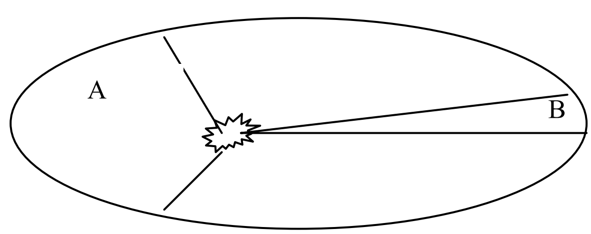
1- Il y a une relation entre la période orbitale des 2 objets et leurs rayons.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \cong \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

où T_1 et T_2 sont les périodes des objets en rotation
et r_1 et r_2 sont leurs distances au soleil

2-La trajectoire de chacune des planètes du système solaire est une ellipse dont l'un des foyers est le soleil.

3-La trajectoire de chaque planète est définie de sorte que chacune d'elles couvre la même surface de l'ellipse en même temps. En d'autres mots, si une planète est près du soleil, elle va plus vite que si elle en était éloignée. La région A a donc la même surface que la région B



2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

1. Vrai ou faux?
   Si un objet ne bouge pas, alors il n'y a pas de forces présentes.
2. Vrai ou faux?
   Si la force nette agissant sur un objet est égale à zéro, alors l'objet ne bouge pas.
3. Quelle est l'unité utilisée pour la force?
4. Une force nette de 500 N agit sur un bloc pesant 50 kg. Quelle est l'accélération du bloc?
5. Un garçon tire une boîte avec une corde. Quelles sont les quatre forces impliquées?
6. Vrai ou faux?
   Plus une surface est lisse, plus le coefficient de friction est grand.
7. Vrai ou faux?
   Si un objet bouge à vitesse constante, alors la force nette est zéro.
8. Qu'est-ce qu'une force?
9. Vrai ou faux?
   Plus l'accélération gravitationnelle est grande, plus la force gravitationnelle est petite et plus on se sent léger.
10. L'accélération gravitationnelle est-elle plus grande sur la Terre ou sur la Lune?
11. Selon la loi de Hooke, si l'étirement du ressort augmente alors la force
    ____
12. Vrai ou faux?
    Selon la troisième loi de Newton, la force qu'un corps humain exerce sur la Terre est plus petite que celle que la Terre exerce sur le même corps humain.
13. Une fillette fait tourner une chaudière remplie d'eau au bout d'une corde de 42 cm de longueur. La chaudière remplie d'eau pèse 9 kg. Quelle doit être la vitesse de rotation de la chaudière si l'on veut que cette dernière conserve sa trajectoire circulaire en tout temps?
14. Un objet pesant 1.7 kg tourne au bout d'une corde ayant 0.6 m de longueur. Le temps d'une révolution de l'objet est de 1.1 s. Quelle est la tension dans la corde quand l'objet est situé à sa hauteur maximale? (17 N)
15. Un avion fait un cercle complet ayant un rayon de 3622m en 2.10 minutes. Quelle est sa vitesse?
16. Une corde brisera si une force supérieure à 135 N est appliquée sur elle. Si on utilise cette même corde pour faire tourner une masse de 2kg selon une trajectoire circulaire horizontale de rayon 1.1m, quelle est la vitesse maximale que l'on peut donner à la masse sans faire briser la corde?
17. La période de Vénus est de 225 jours (0.615 année) et celle de la Terre 365 jours (1.0 année). Trouvez la distance Vénus-soleil en utilisant une des lois de Kepler. Note : la distance Terre-soleil est de 1.5×10^{11} m.

Auto-évaluation :

Note : Cette section est une des plus volumineuses et des plus importantes du cours. Planifiez d'y investir plus de temps qu'à l'habitude. De plus, assurez-vous de bien comprendre les concepts-clés ci-dessous :

- différence entre la grandeur et l'orientation d'une force
- dans quelle direction la force gravitationnelle terrestre est orientée
- addition de forces avec la méthode des composantes
- isoler la variable x dans la loi de Hooke
- les trois lois de Newton
- résoudre un problème de force simple comme celui de la question 4
- trouver les différentes forces agissant sur un objet.
- différence entre un vecteur et un scalaire
- tracer plusieurs forces dans un plan cartésien
- utiliser le théorème de Pythagore pour trouver l'angle d'une force
- utiliser les fonctions trigonométriques pour trouver la longueur des côtés d'un triangle (ou d'un vecteur)
- transformer les grammes en kilogrammes
- transformer les centimètres en mètres
- définir ce qu'est une force
- trouver le poids d'un humain connaissant sa masse
- définition de force centripète et de force centrifuge
- définition de vitesse (version cinétique et version rotationnelle)
- définition d'accélération centripète
- le cas spécial d'une trajectoire circulaire dans le plan vertical
- les courbes relevées (angles, force de friction etc)
- Les trois lois de Kepler et leur lien avec les lois de Newton

3. Inertie, masse et forces

Tel que vu en Physique 20 et 30, une force qui agit sur un objet peut contribuer à changer sa vitesse. Les différentes forces qui existent sont catégorisées comme étant des *forces de contact* ou des *forces de champ*.

Forces de contact :

- résultent du contact direct entre deux objets
- appliquées sur un objet
- Exemples : tirer un chariot, pousser une boîte, etc.

Forces de champs :

- forces qui agissent à distance par l'intermédiaire d'un champ
- n'impliquent pas de contact direct entre les objets
- les quatre *interactions fondamentales* impliquent des champs

- interaction *gravitationnelle* (attraction mutuelle entre deux objets; portée pratiquement infinie; puissance p/r à l'interaction forte : 10^{-43})
- interaction nucléaire *forte* (entre les particules subatomiques; portée d'environ 10^{-15} mètre; puissance : 1)
- interaction nucléaire *faible* (procédés radioactifs; portée d'environ 10^{-18} mètre; puissance : 10^{-6})
- interaction *électromagnétique* (entre particules chargées comme les électrons, les protons, etc.; portée pratiquement infinie; puissance : 10^{-2})

De plus, par la seconde loi de Newton, les forces sont trouvées *en paires*, peu importe leur nature. Cependant, ces forces n'agissent pas sur le même objet.

Exemple : Lorsqu'on enfonce un clou avec un marteau, la force F_{cm} exercée sur le clou par le marteau est égale à la force F_{mc} exercée sur le marteau par le clou. Ces deux forces forment une paire complémentaire même si elles agissent sur deux objets différents (le marteau et le clou).

Notation : La force exercée *sur l'objet A par la source B* sera écrite F_{AB}.

Définitions : L'*inertie* d'un objet est la tendance de cet objet à s'opposer à un changement de mouvement.

La *masse* d'un objet est la mesure de son inertie. La masse indique donc la tendance d'un objet à résister à un changement de mouvement. (Remarque : la masse d'un objet n'est pas déterminée uniquement par la quantité de matière qui le compose car, selon la relativité restreinte d'Einstein, la masse varie avec la vitesse selon l'expression. Par exemple, un objet qui file à environ 260 000 000 m/s verra sa masse égale au double de sa masse au repos.)

Définition : Nous reviendrons un peu plus loin sur les problèmes d'équilibre statique; Un objet en *équilibre statique* se déplace à vitesse constante (nulle ou non). Ceci est dû au fait que la somme vectorielle de toutes les forces agissant sur l'objet est nulle. En d'autres mots, nous avons, en trois dimensions,

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0,$$

Plus loin, nous ajouterons d'autres conditions, pour tenir compte de l'équilibre de rotation.

<u>4. Lois de Newton</u>

Pour commencer, énonçons les lois de Newton en tirant profit de la notation vectorielle.

Première loi : Si la force nette agissant sur un objet est nulle, alors il aura tendance à se déplacer à un vecteur vitesse constant, c.-à-d. à conserver la grandeur et la direction de sa vitesse.

Deuxième loi : La somme des forces exercées sur un objet est proportionnelle à la masse de l'objet et à son accélération :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ou, en termes des composantes,

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z,$$

où m est la masse de l'objet (en kg) et a est son accélération (en m/s^2).

Troisième loi : Lorsque deux objets interagissent, la force exercée par l'objet A sur l'objet B est égale à la force exercée par l'objet B sur l'objet A. Sous forme vectorielle,

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

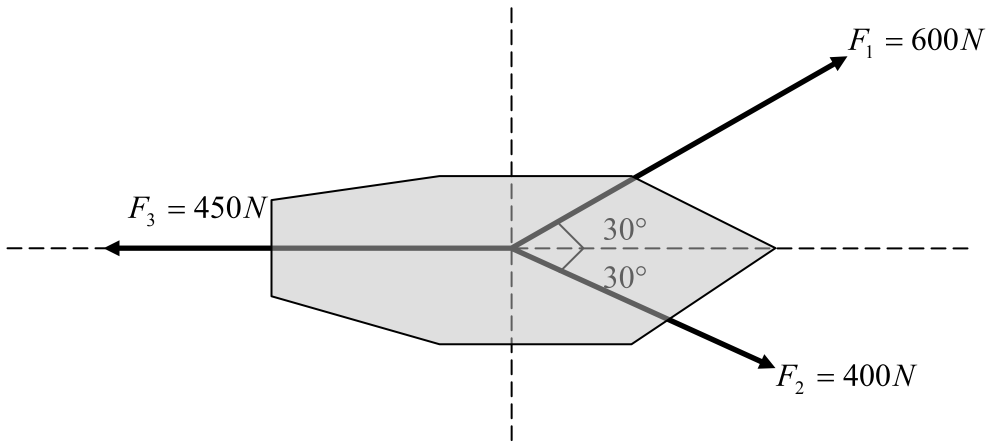
Méthode de résolution de problèmes :

Voici donc quelques étapes à suivre afin de résoudre efficacement des problèmes à l'aide des lois de Newton :

1. lire le problème plusieurs fois
2. dresser la liste des valeurs données et de la valeur cherchée
3. tracer un diagramme des forces (en anglais, *free-body diagram*)
4. au besoin, dessiner séparément chaque objet ainsi que toutes les forces qui agissent sur cet objet
5. pour chaque objet, choisir un système de coordonnées et écrire la deuxième loi de Newton pour chaque composante
6. substituer les valeurs données dans les équations et répondre à la question

Exemple : Deux hommes tentent de retenir un bateau contre le courant (vers la droite) d'une rivière. Le courant tire le bateau vers l'arrière avec une force $F_3 = 450$ N. Un des hommes retient le bateau en tirant sur une corde avec une force $F_1 = 600$ N à un angle de 30° avec l'axe du bateau. Le deuxième homme retient le bateau en tirant sur une corde faisant aussi un angle de 30° avec l'axe du bateau, mais avec une force $F_2 = 400$ N en direction opposée. Le bateau changera-t-il sa vitesse?

1-Données et diagramme de forces :



2-Équations utilisées et valeur cherchée :

Il faut calculer $\sum F_x$ et $\sum F_y$. On pourra affirmer que le bateau restera en place si les deux réponses sont nulles.

3-Raisonnement et calculs :

Forces	composantes *x*	composantes *y*
F_1	+ (600N) cos30 =	+ (600N) sin30 =
F_2	+ (400N) cos30 =	- (400N) sin30 =
F_3		
F_{totale}		

Pour trouver la grandeur de la force résultante, nous calculons

$$F_{\text{nette}} = \sqrt{(F_{\text{nette},x})^2 + (F_{\text{nette},y})^2}$$
$$=$$

et pour trouver l'angle du vecteur résultant, nous calculons

$$\tan\theta = \frac{F_{\text{nette},y}}{F_{\text{nette},x}} =$$
qui donne $\theta = 40.8°$

4-Réponse :

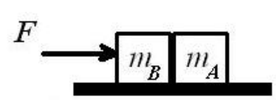
Les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ et $\boldsymbol{F}_3$ ne s'annulent pas force, de sorte que le bateau accélèrera. La force totale vaut $\boldsymbol{F}_{\text{tot}}$ = 153.17 N, faisant un angle de 40.8° au-dessus de l'horizontale.

<u>Question :</u> Lorsqu'un cheval tire un voiture, on pourrait être porté à penser que le système ne peut changer de vitesse, vu que la force $\boldsymbol{F}_{\text{VC}}$ exercée sur la voiture par le cheval est en tout temps égale et opposée force $\boldsymbol{F}_{\text{CV}}$ exercée sur le cheval par la voiture, de sorte que

$$\vec{F}_{VC} + \vec{F}_{CV} = \vec{F}_{VC} + \left(-\vec{F}_{VC}\right) = \vec{0}$$

Et pourtant le système peut changer de vitesse. Expliquez ce qui ne va pas avec le raisonnement ci-dessus.

Exemple : Deux blocs de masses $m_A = 2$ kg, $\text{m}_\text{B} = 3$ kg, sont poussées par une force de F = 20 N sur une surface lisse. Calculez : (a) l'accélération des blocs; (b) la force sur m_B par m_A; (c) la force totale sur m_B, et (d) la force totale sur m_B par m_A si la force de 20 N est plutôt exercée sur m_A vers la gauche.



Solution :

(a) $a = \dfrac{\sum F}{m_{\text{tot}}} = \dfrac{\quad \text{N}}{\quad \text{kg}} = \qquad \text{m/s}^2$ vers la droite

(b) $F_A = F_{AB} = m_A a = (\quad \text{kg})(\quad \text{m/s}^2) = \quad \text{N}$, et donc, $F_{BA} = F_{AB} = \quad \text{N}$ vers la gauche

(c) $F_B = F - F_{BA} = \qquad \text{N}$ vers la droite. (En effet, on trouve par calcul direct que $m_B a = (\quad \text{kg})(\quad \text{m/s}^2) = \quad \text{N}$)

(d) Nous avons encore a = 4 m/s^2, de sorte que $m_B a = (3\,\text{kg})(4\,\text{m/s}^2) = 12\,\text{N}$ vers la gauche.

5. Force par un ressort et loi de Hooke

Rappelons-nous de la Section 1 que la *loi de Hooke* stipule que la force F_{res} exercée sur une masse par un ressort de constante k et étiré d'une distance x hors de sa position d'équilibre est donnée par

$$F_{\text{res}} = -kx$$

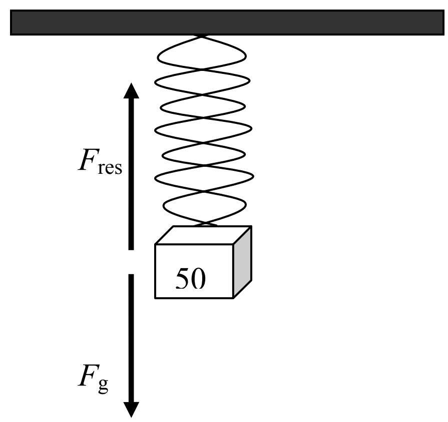
Exemple Une masse de 50 kg attachée à un ressort vertical est au repos. Quelle doit être la constante d'élasticité k du ressort, s'il est étiré de 10 cm lorsqu'on lui attache la masse?

1-Données et diagramme de forces :

masse: 50 kg

g = 9.81 m/s^2

x = 10 cm = 0.01 m



2-Équations utilisées :

$$\sum F = ma\,,\ F_{\text{res}} = -kx \text{ et } F_{\text{g}} = mg$$

3-Raisonnement et calculs :

Lorsque la masse de 50 kg est attachée au ressort, la force gravitationnelle tire la masse vers le bas tandis que la force exercée par le ressort est vers le haut. La deuxième loi de Newton donne donc

$$\begin{aligned}\sum F &= F_{\text{grav}} + F_{\text{res}} \\ &= -mg + kx = 0\end{aligned}$$

d'où la réponse :

$$k = \frac{mg}{x} = \qquad\qquad \text{N/m.}$$

6. Exemples avec des plans inclinés

Cet exemple illustre le fait qu'il est souvent commode d'utiliser un système de coordonnées qui n'est pas nécessairement horizontal-vertical.

Définition : La *force normale* (écrite $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ ou $\boldsymbol{N}$) est la force exercée par le plan sur l'objet, et elle est perpendiculaire au plan. Dans le contexte de vecteurs, « normal » signifie souvent « perpendiculaire ».

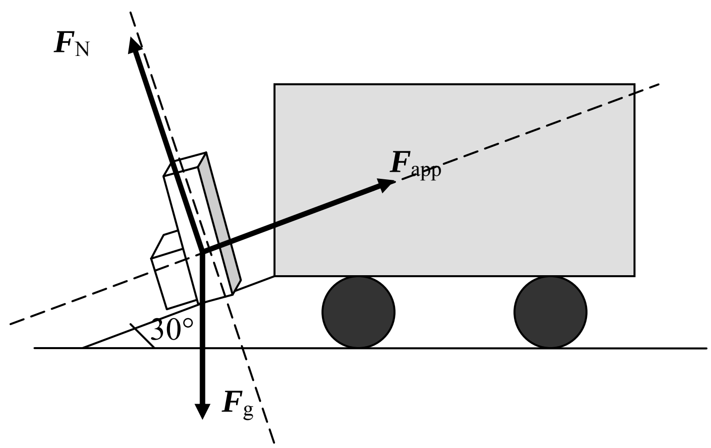
Exemple Un déménageur pousse un piano de 140 kg vers le haut d'un plan incliné de 30° vers un camion-remorque. Quelle force F_{app} le déménageur doit-il appliquer pour pousser le piano de 140 kg dans la remorque à vitesse constante?

1-Données et diagramme de forces :

masse du piano : 140 kg

gravité : 9.81 m/s^2

angle du plan incliné : 30°



2-Équations utilisées :

- Force gravitationnelle du piano $F_{grav} = mg$
- Force normale du piano $F_N = F_{grav}\cos\theta$
- Force totale $\sum \vec{F} = \vec{0}$ (pourquoi?)

3-Raisonnement et calculs

Choisissons l'axe des *x* dans la direction de $\boldsymbol{F}_{\mathrm{app}}$ et l'axe *y* vers le haut. Il peut être utile de dresser un tableau des composantes.

	composantes *x*	composantes *y*
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$		
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$	0	
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{app}}$		0
$\sum \boldsymbol{F}$		

Comme $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, les composantes x et y de la dernière ligne sont chacune égale à zéro, ce qui implique que le déménageur doit exercer sur le piano une force de

$$F_{app} = \qquad\qquad \text{N}$$

Remarquez que les composantes *y* nous sont inutiles ici.

7. Force de friction

Définitions :

- La *force de friction cinétique* F_K est la force exercée sur un objet par la surface de contact lorsque celui-ci glisse sur cette surface. La force s'oppose alors à la vitesse de l'objet et a une grandeur

  $$F_K = \mu_K F_N$$

  où μ_K est le *coefficient de friction cinétique* et F_N est la force normale exercée par le plan sur l'objet.
- La *force de friction statique* F_S est la force qui retient un objet sur une surface sans qu'il n'y ait de glissement. La grandeur de cette force s'adapte aux autres forces qui agissent sur l'objet de façon à les annuler. Quand l'objet est sur le point de commencer à glisser, c'est que F_S a atteint sa valeur maximale, donnée par

  $$F_S^{\max} = \mu_S F_N$$

  où μ_S est le *coefficient de friction statique* et F_N est la force normale exercée par le plan sur l'objet. Donc, en général

  $$F_S \le \mu_S F_N$$

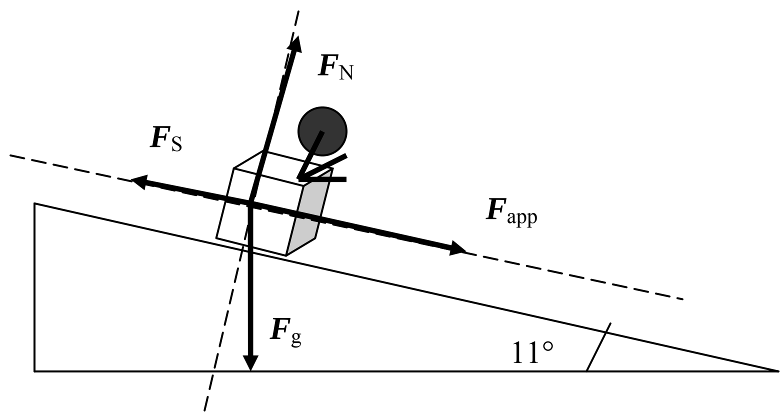
Question : Pourquoi n'écrivons-nous pas ces équations sous forme vectorielle, c.-à-d. $\vec{F}_K = \mu_K \vec{F}_N$? Il serait peut-être utile de connaître la réponse à cette question avant l'examen de mi-session. Discutez avec d'autres étudiants de la classe.

Exemple : Un garçon désire descendre une colline assis sur une boîte en carton. L'enfant pèse 30 kg et la pente de la colline fait un angle de 11° avec l'horizontale. De plus, le coefficient de friction statique entre la boîte en carton et la neige est de 0.668. Quelle force minimale $\boldsymbol{F}_{\text{app}}$ doit-on appliquer pour que l'enfant puisse commencer à glisser?

1-Données et diagramme de forces :

masse de l'enfant : 30 kg
gravité : 9.81 m/s^2

angle du plan incliné : 11°
$\mu_S = 0.668$



2-Équations utilisées :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\,, \quad F_g = mg\,, \quad F_N = mg\cos\theta\,, \quad F_S = F_S^{\max} = \mu_S F_N$$

On choisit l'axe des *x* parallèle à $\boldsymbol{F}_{\text{app}}$ et l'axe y parallèle à $\boldsymbol{F}_{\text{N}}$.

3-Raisonnement et calculs :

Le fait que l'enfant soit sur le point de glisser est contenu dans l'*égalité* $F_S = F_S^{\max}$.

	composantes *x*	composantes *y*
$\boldsymbol{F}_{\text{g}}$		
$\boldsymbol{F}_{\text{N}}$	0	
$\boldsymbol{F}_{\text{S}}$		0
$\boldsymbol{F}_{\text{app}}$		*0*

Nous trouvons donc les deux équations suivantes

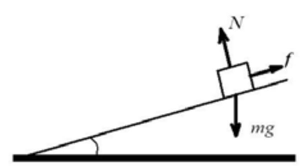
$$\sum F_x =$$
$$\sum F_y =$$

dont la seconde nous donne $F_N = mg\cos\theta$. Lorsque l'enfant commence à peine à accélérer, nous avons $a_x = 0$, de sorte que la première équation nous donne

$$F_{\text{app}} = -mg\sin\theta + \mu_S mg\cos\theta = (-\tan\theta + \mu_S)mg\cos\theta$$
$$= \qquad\qquad \text{N}$$

Exemple : Un bloc de masse $m = 12$ kg repose sur un plan incliné. Les coefficients de frottement cinétique et statique valent respectivement 0.23 et 0.68. (a) À partir de quel angle θ le bloc se mettra-t-il à glisser par rapport au plan? (b) Si le plan est incliné de 38°, quelle est l'accélération du bloc?

1-Diagramme de forces :



Équations utilisées : Selon le cas considéré, le symbole ***f*** représente la force statique $\boldsymbol{F}_S$ (bloc au repos sur le plan incliné)ou la force cinétique $\boldsymbol{F}_K$ (bloc glisse sur le plan incliné). Nous utiliserons

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \quad F_K = \mu_K N, \quad F_S = \mu_S N$$

Solution : Choisissons l'axe des x parallèle au plan et vers le bas, c.-à-d. dans la direction de $-\boldsymbol{f}$. L'axe y est parallèle à la normale ***N***. La deuxième loi de Newton devient donc

$$F_x = \qquad\qquad = ma_x$$
$$F_y = \qquad\qquad = ma_y$$

Pour la partie (a), la force ***f*** est la force statique, donnée par $F_S = \mu_S N$. Aussi, le vecteur accélération est nul, de sorte que la seconde équation nous donne $N = mg\cos\theta$, de sorte que $F_S = \mu_S mg\cos\theta$. L'objet étant sur le point de commencer à glisser, son accélération a_x est presque nulle, de sorte que la première équation devient

$$-\mu_S mg\cos\theta_{\min} + mg\sin\theta_{\min} = 0$$

où $\theta_{\min}$ signifie qu'il s'agit de l'angle minimum pour que le bloc glisse. La réponse est donc $\tan\theta_{\min} =$ d'où $\theta = 34.2°$.

Pour la partie (b), la force ***f*** est la friction cinétique, $F_K = \mu_K N$. Dans ce cas-ci, le vecteur accélération est (a_x, 0) car la composante de la vitesse perpendiculaire au plan est toujours zéro. Nous retrouvons donc encore $N = mg\cos\theta$, et la composante x nous donne

$$\begin{aligned} ma_x &= -\mu_K N + mg\sin\theta \\ &= -\mu_K\left(mg\cos\theta\right) + mg\sin\theta \\ &= mg\cos\theta\left(-\mu_K + \tan\theta\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$a_x = g\cos\theta\left(-\mu_K + \tan\theta\right) = (9.8)(\cos 38)(-0.23 + \tan 38) = 4.26 \text{ m/s}^2.$$

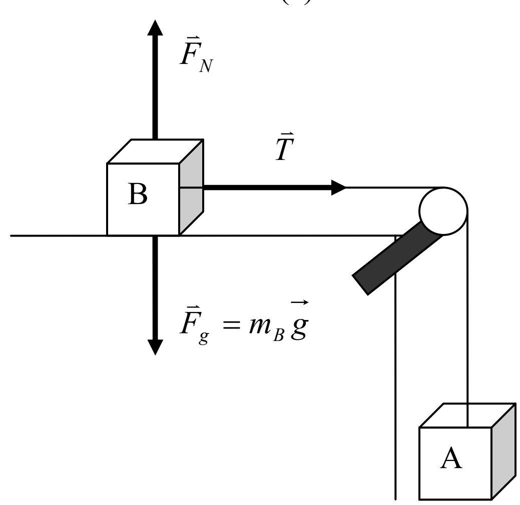
<u>8. Objets liés par une corde</u>

<u>Définition</u> : La *tension* en un point d'une corde est la force exercée sur un segment de la corde par le segment adjacent. En d'autres termes, la tension serait la mesure lue sur une balance à ressort insérée en un point où on couperait la corde.

Pour une corde de masse négligeable, la tension est la même en tout point de la corde. Aussi, deux objets attachés aux extrémités d'une corde ont la même vitesse et la même accélération.

Exemple : Deux objets, de masses m_A = 30 kg et m_B = 20 kg, sont liés par une corde tel qu'illustré ci-dessous. La surface est sans friction. Trouvez : (a) la tension dans la corde et (b) l'accélération des deux objets.

Solution :



Nous utiliserons $\sum\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ pour m_A et m_B. Choisissons pour chaque masse un système de coordonnées où x est positif vers la droite et y positif vers le haut. Nous supposons aussi que l'accélération de m_A est positive vers le bas. Nous obtenons donc

(1) $\sum F_{A,x} =$, (2) $\sum F_{A,y} =$

(3) $\sum F_{B,x} =$, (4) $\sum F_{B,y} =$

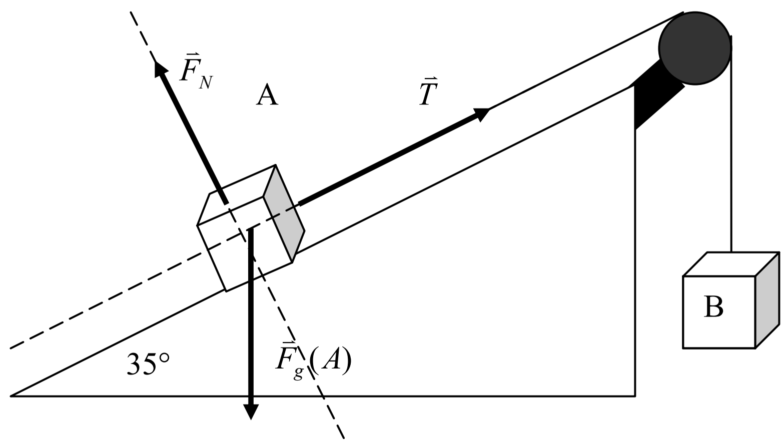
L'équation (1) est inutile. En remplaçant T de l'équation (3) dans l'équation (2), nous trouvons

$$a = \frac{m_A g}{m_A + m_B} = \qquad \text{m/s}^2$$

et en remplaçant cette valeur dans l'équation (3), nous obtenons $T =$ N.

Exemple : Un bloc A glisse vers le haut d'un plan incliné de 35° , et est lié à une masse B suspendue dans le vide. Si m_A = 75 kg et m_B = 45 kg, que les coefficients de frottement entre le bloc A et le plan sont $\mu_K = 0.17$ et $\mu_S = 0.58$, et que le bloc B se déplace vers le bas, (a) quelle est la tension dans la corde et (b) l'accélération des masses?

Schéma :



Solution :

Choisissons

- l'accélération positive de B vers le bas
- le système de coordonnées attaché à A tel que x est positif dans le sens de $\boldsymbol{T}$ et y positif vers $\boldsymbol{F}_N$
- le système de coordonnées attaché à B tel que x est positif vers la droite et y positif vers le haut

De plus, comme le bloc A glisse sur la surface, nous devons utiliser le coefficient cinétique μ_K.

La deuxième loi de Newton nous donne donc

$$\sum F_{A,x} = \qquad\qquad = m_A a \qquad (1)$$
$$\sum F_{A,y} = \qquad\qquad = 0 \qquad (2)$$
$$\sum F_{B,x} = 0 \qquad (3)$$
$$\sum F_{B,y} = \qquad\qquad = -m_B a \qquad (4)$$

L'équation (2) nous donne $F_N = m_A g \cos\theta$, que l'on remplace dans (1) pour obtenir $T - \mu_K m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = m_A a$ dans laquelle on substitue $T = m_B g - m_B a$ (de (4)), pour trouver

$$a = \frac{m_B g - m_A g \cos\theta(\mu_K + \tan\theta)}{m_A + m_B}$$
$$= \qquad\qquad \text{cm/s}^2$$

Vu que nous avons choisi l'accélération du bloc B positive vers le bas, une accélération négative est donc dirigée vers le haut. Et comme la question indique que le bloc B se déplace vers le bas, il *ralentit* donc à un taux de 69.1 cm/s^2.

Nous pouvons trouver la tension dans la corde à partir de l'équation (1) ou (4). Par exemple, de (4), nous trouvons

$$T = m_B(g - a) = \qquad\qquad \text{N.}$$

9. Mouvement circulaire

Définition : Unité d'angle 2π radians = 360°
1 radian = 360/(2π)° ≈ 57.3°

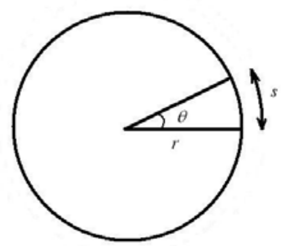
Le *radian* est une unité d'angle plus fondamentale que le degré, défini arbitrairement de façon qu'un tour corresponde à 360°. Cela aurait pu être un autre nombre que 360, par exemple, 100. Le facteur 2π pour un tour vient évidemment du fait que la circonférence du cercle vaut 2π fois son rayon :

$$C = 2\pi\, r$$

Plus généralement, pour un cercle de rayon *r*, la longueur de l'arc de cercle (*s* dans la figure ci-dessous) sous-tendu par un angle de θ radians est donné par la relation

$$s = \theta r \qquad (\theta \text{ en radians})$$

dont la formule précédente est évidemment un cas particulier.



Tout comme les systèmes de coordonnées cartésiennes, dont l'origine peut être choisie n'importe où, la position du point $\theta = 0$ est arbitraire. Nous la prendrons souvent à l'extrême droite du cercle.

Il faut utiliser les radians lorsque des calculs impliquent des rapports de longueurs…

<u>Définition :</u> La *vitesse angulaire* ω (oméga) d'un point autour du cercle est le taux de variation de son angle, en rad/s :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (\omega \text{ en rad/s})$$

<u>Définition :</u> L'*accélération angulaire* α d'un point autour du cercle est le taux de variation de sa vitesse angulaire :

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (\alpha \text{ en rad/s}^2)$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2}$$

<u>Définition :</u> La *vitesse tangentielle* est la vitesse linéaire (en m/s) d'un objet le long de sa trajectoire, c.-à-d. le taux de variation d'arc de cercle

$$v_T = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dt}} \qquad (\text{en m/s})$$

Comme $s = \theta r$, pour laquelle *r* est constant, nous obtenons

$$v_T = \frac{\mathrm{d}(\theta r)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\theta)}{\mathrm{dt}} r = \omega r$$

<u>Définition :</u> L'*accélération tangentielle* est l'accélération linéaire (en m/s^2) d'un objet le long de sa trajectoire,

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{T}}{\mathrm{dt}} \qquad \text{(en m/s}^2\text{)}$$

Dans ce cas, nous obtenons

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\omega r)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\omega)}{\mathrm{dt}} r = \alpha r$$

<u>Équations de la cinématique de rotation à accélération angulaire constante:</u>

Si α est constante, alors nous obtenons les équations suivantes de la même façon que les équations vues dans le chapitre *Cinématique à deux dimensions* :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$
$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$$

Exemple : Un disque long-jeu (en anglais, *long play* ou *LP*) tourne à 33 tours par minute. (a) Quel est la vitesse angulaire en rad/s? (b) Quelle est la vitesse tangentielle d'un point situé à sa circonférence, si le rayon du disque est de 12 cm? (c) Quelle est l'accélération angulaire (supposée constante) si le disque arrête en 3 s? (d) Combien de tours sont effectués du moment où le disque commence à ralentir et l'arrêt complet?

Solution :

(a) $\omega = \left(\qquad \frac{\text{tours}}{\text{min}} \right) \times \left(\frac{\qquad \text{radians}}{1\,\text{tour}} \right) \times \left(\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{sec}} \right) = \qquad$ rad/s

(b) $v_T = \omega r = (\qquad)(\qquad) = \qquad$ m/s

(c) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ nous donne $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \qquad$ rad/s^2. Le signe indique un ralentissement.

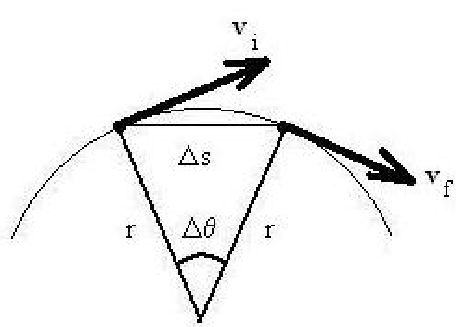
(d) $\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ nous donne $\theta - \theta_0 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2\alpha} =$ rad, ce qui donne rad $\times \left(\dfrac{1 \text{ tour}}{2\pi \text{ rad}}\right) =$ tour.

Définition : L'*accélération centripète* d'un objet en mouvement circulaire (à vitesse tangentielle uniforme ou non), à vitesse tangentielle v_T et autour d'un cercle de rayon *r* , est donnée par :

$$a_C = \frac{v_T{}^2}{r}$$

Cette accélération est due au changement de direction du vecteur vitesse. Ainsi, même si la vitesse tangentielle est constante en grandeur, sa direction changera et nous aurons une accélération a_C non nulle.

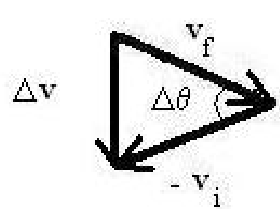
Preuve : La figure ci-dessous représente l'évolution du vecteur vitesse ***v*** au cours d'une rotation. À l'instant t_i, la vitesse est donnée par le vecteur $\boldsymbol{v}_i$ et, un peu plus tard, à l'instant t_f, la vitesse est donnée par $\boldsymbol{v}_f$.



Pour simplifier la discussion, supposons que le vecteur ***v*** ne change qu'en direction, mais que sa grandeur est constante et de valeur |***v***| = *v*. L'accélération est donné par

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta \text{t}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

Le numérateur du dernier terme est illustré ci-dessous



L'important est de réaliser que ce triangle est semblable à celui de la figure précédente, ce qui implique que $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r}$, d'où $\Delta v = v\frac{\Delta s}{r}$. La grandeur de l'accélération centripète a_C est donc donnée par

$$a_C = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\overbrace{\Delta s}^{v}}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Nous considérons des exemples dans le cadre de la force gravitationnelle.

<u>10. Force de gravitation</u>

<u>Définition :</u> Soit deux objets, typiquement des corps célestes, de masses respectives m_1 et m_2, séparés d'une distance r. La *force gravitationnelle* $\boldsymbol{F}_{\text{grav}}$ les fait s'attirer l'un de l'autre avec comme grandeur

$$F_{\text{grav}} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\ \text{N}$$

où les masses sont en kg, la distance en m et

$$G = 6.6742\times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$$

est la constante de gravitation universelle.

<u>Définition :</u> La *force gravitationnelle de surface* est la force gravitationnelle près de la surface d'une planète. Par exemple, si un objet de masse m se trouve à la surface de la Terre, cette force est donnée (en Newton) par

$$F_{\text{grav}} = mg \quad \text{où } g = 9.81\ \text{m/s}^2$$

Cette formule suit de la relation précédente, dans le cas ou la Terre et l'objet sont les deux objets en question. Avec $m_1 = m_{\text{Terre}}$, et $m_2 = m$ pour l'objet, nous obtenons

$$F_{\text{grav}} = \overbrace{\frac{Gm_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}^{\ 2}}}^{g} m$$

d'où nous trouvons la seconde relation.

Exemple : Quelle est la force gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune, sachant que $m_{\text{Terre}} = 5.9724\times 10^{24}$ kg, $m_{\text{Lune}} = 7.35\times 10^{22}$ kg et qu'elles sont à 384 403 km l'une de l'autre ?

Solution :

$$\begin{aligned} F_{\text{grav}} &= \frac{Gm_{\text{Terre}}m_{\text{Lune}}}{r^2} = \left(6.6742\times 10^{-11}\right)\left(5.9724\times 10^{24}\right)\left(7.35\times 10^{22}\right)/\left(3.84403\times 10^{8}\right)^2 \\ &= 1.98\times 10^{20}\ \text{N} \end{aligned}$$

Exemple : Quelle est la force gravitationnelle exercée par un homme de 100 kg sur la Terre. Prenez la formule à la surface terrestre.

Solution : $F_{\text{grav}} = mg = 100 \times 9.8 = 980$ N par la troisième loi de Newton.

Exemple : Un satellite artificiel de masse *m*, se déplace à une distance *d* au-dessus de la surface terrestre. À quelle vitesse (tangentielle) se déplace-t-il?

Solution : La vitesse entre dans le jeu via la formule de l'accélération centripète. La force est

$$F_{\text{grav}} = \frac{Gm_{\text{Terre}}m}{r^2} \qquad \text{où } r = r_{\text{Terre}} + d \ \ (r_{\text{Terre}} \text{ : rayon terrestre)}$$

de Newton II $$F_{\text{grav}} = \frac{Gm_{\text{Terre}}m}{r^2} = ma_C = \frac{mv_T^{\ 2}}{r}$$

11. Courbes routières

Exemple : Une automobile de masse *M* roule sur une piste circulaire de rayon *R*. Les coefficients de friction cinétique et statique sont μ_K et μ_S, respectivement. (a) Quelle force cause l'accélération centripète? (La question traditionnelle serait quelle est la nature de la force centripète.) (b) Quelle est la vitesse maximale que peut maintenir cette automobile avant de glisser? (c) Si l'auto a une masse de 1500 kg, que le rayon de la piste est 100 m et que la vitesse maximale est 90 km/h, quel est le coefficient de frottement statique?

Solution :

(a) Le frottement *statique*.

(b) $\sum F = Ma \quad \Rightarrow \quad f_S = \mu_S Mg = M\,\frac{v^2}{R}$ Le terme « vitesse maximale » indique que la voiture est sur le point de glisser, donc que $f_S = f_S^{\text{max}}$. La réponse est donc

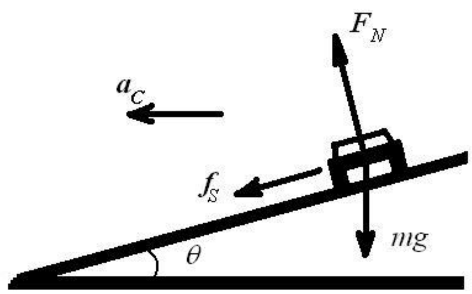
$$v_{\text{max}} = \sqrt{\qquad\qquad}$$

(c) De la partie précédente, nous trouvons (avec la vitesse 90 km/h × 1 h/3600 s = 25 m/s) :

$$\mu_S = \frac{v_{\text{max}}^{\ 2}}{Rg} = \frac{(\qquad)^2}{(\qquad\quad)} =$$

Exemple : Afin de pouvoir aller plus vite dans une courbe, le côté extérieur de la route peut être incliné. Ainsi, la force de gravitation vient prêter main forte à la friction pour maintenir l'accélération centripète. Si la question est comme l'exemple précédent, avec la différence que la route est relevée d'un angle θ, quelle est la vitesse maximale, en termes de R, g, θ et μ_S? Que vaut cette vitesse si m = 1000 kg, R = 10 m, θ = 37° et μ_S = 0.1?

Solution : Vu du dessus, l'automobile décrit une trajectoire circulaire de rayon R, avec le vecteur accélération centripète pointant vers le centre. Si on la regarde plutôt du devant, nous observons le schéma suivant :



Il s'agit d'appliquer la deuxième loi de Newton. Comme l'accélération a_C est horizontale, choisissons l'axe x positif vers la gauche (dans le schéma ci-dessus) et y positifi vers le haut. Ainsi, nous aurons $\sum F_x = \frac{mv^2}{R}$ et $\sum F_y = 0$. Et comme dans l'exemple précédent, vu que la vitesse maximale est caractérisée par le fait que l'auto est sur le point de glisser, nous utiliserons encore $f_S = f_S^{\max} = \mu_S F_N$. Les trois forces qui agissent sur l'auto, poids, normale et friction, se décomposent donc comme suit :

$$\sum F_x = \qquad\qquad = \frac{m{v_{\max}}^2}{R}$$
$$\sum F_Y = \qquad\qquad = 0$$

en isolant la vitesse, nous trouvons

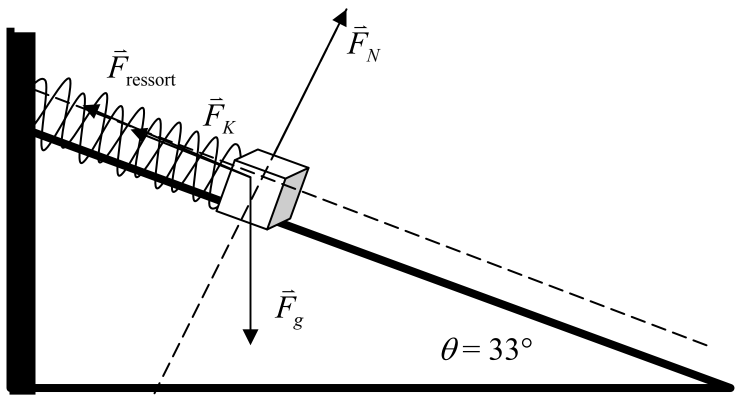
$$v_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\tan\theta + \mu_S}{1 - \mu_S \tan\theta}\right) Rg}$$

Avec les valeurs données à la dernière partie de la question, nous trouvons $v_{\max} = 9.5$ m/s, c.-à-d. 34.2 km/h.

12. Exemples supplémentaires

Exemple : Une masse de 42 kg attachée à un ressort de constante k = 300 N/m glisse vers le bas d'un plan incliné de 33°, tel que montré à la figure ci-dessous. De plus, il y a un coefficient de friction cinétique de 0.12 entre la masse et la surface du plan. Quelle est l'accélération de la masse au moment où le ressort est étiré de 14 cm hors de sa position d'équilibre?

Diagramme de forces :



Solution :

Comme l'accélération ne peut être que parallèle au plan incliné, choisissons l'axe des x parallèle au plan et positif vers le bas, et l'axe y dans la direction de la force $\boldsymbol{F}_N$. Newton II donne donc

$$\sum F_x = \quad - \quad - \quad = ma$$
$$\sum F_y = \quad - \quad = 0$$

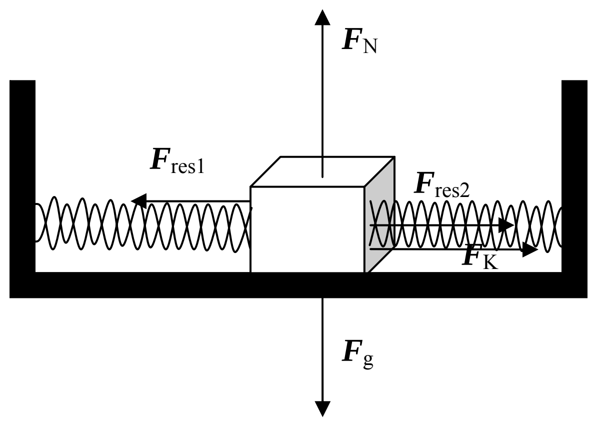
d'où l'accélération

$$a = g\cos\theta(\tan\theta - \mu_K) - \frac{k}{m}x$$
$$=$$

Comme le signe positif représente un mouvement vers le bas, nous en concluons donc que l'accélération est de 5.45 m/s vers le haut.

Exemple : Une masse de 60 kg est reliée à deux murs fixes par des ressorts de constantes k_1 = 300 N/m et k_2 = 120 N/m, tel que montré ci-dessous. Le coefficient de friction cinétique est 0.22. En supposant qu'initialement, la masse se trouve à la position d'équilibre de chaque ressort, on déplace la masse de 10 cm vers la droite avant de la relâcher. Quelle est l'accélération de la masse au moment où elle passe (se déplaçant vers la gauche) à 5 cm à droite de la position d'équilibre des ressorts?

Diagramme de forces :



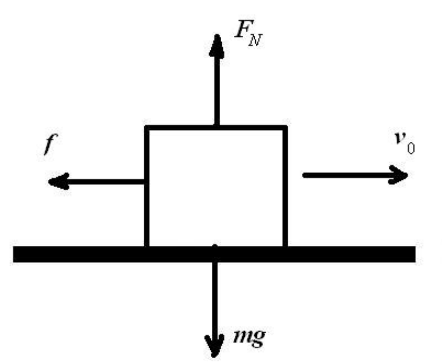
Solution : Prenons les axes x et y positifs vers la droite et vers le haut, respectivement.

$$\sum F_x = \quad + \quad - \quad = ma$$
$$\sum F_y = \quad - \quad = 0$$

d'où $a = (k_1 - k_2)\dfrac{x}{m} + \mu_K g =$ m/s^2.

Exemple : Une rondelle de hockey ayant une vitesse initiale de 20 m/s vers la droite glisse sur une distance de 120 m avant de s'immobiliser. Parle-t-on de coefficient de friction statique ou cinétique? Quel est sa valeur?

Diagramme de forces :



Solution :

Il s'agit de friction *cinétique*, car les deux surfaces glissent l'une sur l'autre. Comme la question implique une distance, des vitesses (initiale et finale), il nous faut utiliser une équation de la cinématique, pour trouver l'accélération de la deuxième loi de Newton.

Considérons $v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$, où $v = 0$ m/s, $v_0 = 20$ m/s et $x - x_0 = 120$ m. Nous obtenons de l'équation que $a = -1.67$ m/s^2. De Newton II, nous trouvons :

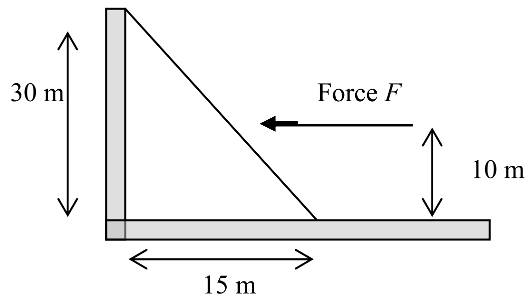
$$\sum F_x = \qquad = ma$$
$$\sum F_y = \qquad = 0$$

En remplaçant $f_K = \mu_K F_N$ dans la première équation, et en utilisant la seconde équation, nous avons $ma = -\mu_K F_N = -\mu_K mg$, d'où

$$\mu_K = -\frac{a}{g} = -\frac{(-1.67)}{9.8} = 0.17$$

13. Test formatif

1. Une force de 400N est requise pour faire bouger une boîte sur une surface en béton. Quel est le coefficient statique de friction entre la boîte et la surface?
2. Une poutre pesant 50 N est accotée à un mur comme le montre la figure suivante. Le coefficient de friction entre la poutre et le mur est le même que celui entre la poutre et le sol. La valeur du coefficient de friction est de 0.30. Calculez la valeur minimale de la force F qui doit être appliquée pour que la poutre reste en équilibre statique.



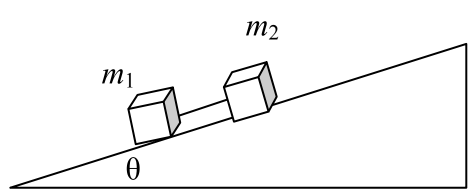
3. Trouvez la plus grande valeur d'angle pour laquelle une force F qui augmente graduellement peut être appliquée sur un bloc de 45.45 kg. Le coefficient de friction statique est de 0.5.
4. Une barre de savon glisse le long d'un plan incliné de 7° mesurant 12 m de long. Si on assume que la coefficient de friction cinétique est de 0.050, combien de temps faut-il à la barre de savon pour atteindre le bas du plan incliné?
5. Deux blocs faits de matériaux différents sont reliés par une mince corde et glissent le long d'un plan incliné à un angle de θ. Sachant que :

   $m_1 = m_2 = 5$ kg

   et que

   $\mu_1 = 0.20$ et $\mu_2 = 0.30$

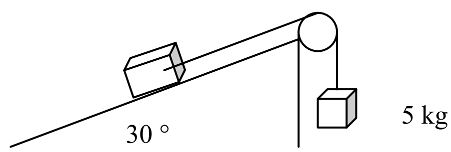
   Déterminez l'accélération des blocs et la tension dans la corde pour un angle de 30°



6. On donne une vitesse initiale v_0 à un bloc de masse m se déplaçant sur un plan incliné à θ degrés. Le bloc parcourt une distance d vers le haut du plan incliné avant de s'arrêter. Déterminez une expression pour définir le coefficient de friction cinétique entre le bloc et le plan incliné. Que pouvez-vous dire à propos du coefficient statique de friction?

7. Une boîte de 10 kg est immobile sur une surface horizontale. Le coefficient de friction statique est de 0.40 et celui de friction cinétique est de 0.30. Déterminez la force de friction F_r qui agit sur la boîte, si la force appliquée F_a a une magnitude de…
   a) $F_a = 10$N
   b) $F_a = 20$ N
   c) $F_a = 38$ N
   d) $F_a = 40$ N

8. Une voiture de 1000 kg attaque une courbe non relevée (not banked) sur une route circulaire ayant un rayon de 50 m, et ce, à une vitesse de 50 km/h (14 m/s). La voiture dérapera-t-elle si…
   a) la route est sèche et son coefficient de friction statique est de 0.80?
   b) la route est glacée et son coefficient de friction statique est de 0.2?
9. Une voiture de 1000 kg tire une remorque pesant 450 kg. La voiture exerce une force horizontale de 3500 N contre le sol pour pouvoir accélérer. Quelle est la force que la voiture doit exercer sur la remorque si le coefficient de friction est de 0.15?
10. Quelles peuvent être les valeurs minimale et maximale de la masse sur le plan incliné pour que le système n'accélère pas? Assumez que μs = μk = 0.5.



11. Deux boîtes ont des masses respectives de 80 kg et 110 kg. Elles sont initiallement en contact (non empilées) et repose sur une surface horizontale. Une force de 650 N est appliquée sur la boîte de 80 kg. Le coefficient de friction est de 0.20. Calculez…
    a) l'accélération du système
    b) les forces que les boîtes exercent l'une sur l'autre
12. Calculez la valeur de la force gravitationnelle entre une personne pesant 60 kg et une autre pesant 80 kg si ces dernières sont séparées par une distance de 10 m. Quelle est la différence de force si les deux personnes sont séparées par une distance de 0.5 m.
13. Quelle est la vitesse maximale avec laquelle une voiture de 1400 kg peut attaquer une courbe non relevée ayant un rayon de 80 m? Le coefficient de friction entre les pneus et la chaussée est de 0.55. Le résultat est-il indépendant de la masse de la voiture?
14. Calculez la valeur exacte de l'accélération gravitationnelle à 3200 m et à 3200 km au-dessus de la surface de la terre. Laquelle des valeurs est plus élevée?
15. Quelle est l'intensité du champ gravitationnel à la surface de la terre dû à la présence du soleil? Votre poids sur la terre en sera-t-il grandement affecté?
16. Le rayon de la lune est de 1.7×10^6 m et sa masse est de 7.4×10^{22} kg. Quelle est la valeur d'accélération gravitationnelle sur la lune?

17. Un singe de 15 kg se pend sur une corde attachée au plafond d'un ascenseur. La corde peut résister à une tension maximale de 200 N et se brise lorsque l'ascenseur accélère. Quelle doit être l'accélération minimale de l'ascenseur pour que cela se produise? (direction et magnitude)
18. Montrez que si un satellite orbite très près de la surface d'une planète ayant une période T, la densité de la planète est de $\rho = 3\pi/GT^2$.
19. Utilisez les lois de Kepler et la période de la lune (27.4 jours) pour déterminer la période d'un satellite artificiel qui orbite près de la surface de la terre.

Réponses

1. 1.0
2. 33.8 N
3. 45 degrés
4. 5.8s
5. 2.8 m/s^2 et 2.1 N
6. coefficient friction cinétique = $(v_o^2/2gd\cos\theta) - \tan\theta$, coef. statique$\geq\tan\theta$
7.
   a) la force de friction statique s'opposera à F_a tant et aussi longtemps que $F_a < \mu_s F_n$ <39.2 N donce la boîte ne bougera pas puisque la force appliquée n'est que de 10 N.
   b) comme pour a) , la force de 20 N ne sera pas assez grande pour faire bouger la boîte.
   c) La force appliquée de 38 N n'est pas encore assez grande pour faire bouger la boîte
   d) La force appliquée de 40 N est plus grande que celle de 39.2 N. Ainsi, la boîte bougera et l'on doit utiliser le coefficient de friction cinétique. La force de friction F_r est de 29 N.
8.
   a) la voiture ne dérapera pas puisque la force de friction est de 7800 N et que la force normale de la voiture n'est que de 3900N. Ici, on utilise la force normale puisque la route n'est pas relevée.
   b) la voiture dérapera puisque la force de friction est de 2000N et que la force normale nécessaire pour la garder sur la route est de 3900 N
9. 1540 N
10. masse minimale 5.4 kg et masse maximale 74.6 kg
11.
   a) 1.5 m/s^2
   b) 380 N
12. 3.2 × 10-9 N, 1.3 × 10-6 N
13. 21 m/s, la masse de la voiture n'est pas importante
14. 5.1 × 10-8 N vers la masse placée dans le coin le plus éloigné
15. 0.00593 N/kg, la masse d'une personne sur la terre ne sera pas vraiment affectée.
16. 1.7079 m/s^2
17. 3.53 m/s^2 vers le haut
18. preuve mathématique
19. preuve mathématique

Travail et énergie

Sections | Page

1. Rappel de Physique 20 et 30

Définition : L'*énergie* est la capacité d'effectuer un travail. Le *travail* W exercé par une force F sur un objet le long d'un déplacement d parallèle à F, est donné par

$$W = Fd$$

où W est en *Joules* (J), F est la force en Newtons and d est le déplacement en mètres. L'unité de travail et d'énergie s'appelle le *Joule* (J), telle que 1 J = 1 N/m.

Le travail est une quantité *scalaire* qui résulte du produit de deux vecteurs : la force et le déplacement. Nous verrons plus loin qu'il est basé sur le produit scalaire qui est défini dans la section 10 du chapitre *Outils mathématiques de la physique*.

Si la force agissant sur un objet n'est pas parallèle au déplacement, alors F n'est que la composante de la force qui est *parallèle* au déplacement.

Le travail peut être positif ou négatif. Lorsqu'il est *positif*, on peut dire que la force *attire* l'objet le long de sa direction. Dans les cas où le travail est *négatif*, on dit alors que la force *retient* l'objet.

Définition : *L'énergie cinétique* E_K d'un objet de masse m se déplaçant à vitesse $\mathbf{v}$ dans un système de référence, est définie par la relation suivante :

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

Définition : *L'énergie potentielle gravitationnelle* $E_{P,\text{grav}}$ d'un objet de masse m est définie de telle sorte que si l'objet se déplace d'une distance verticale h, alors son énergie subit un changement donné par

$$(E_{P,\text{grav}})_f - (E_{P,\text{grav}})_i = mgh$$

avec h positif si l'objet monte, et négatif si l'objet descend.

Si l'on choisit $(E_{P,\text{grav}})_i = 0$, c.-à-d. l'énergie est nulle au point de départ de l'objet, alors l'équation ci-dessus se ramène à

$$E_{P,\text{grav}} = mgh$$

Certains outils mathématiques vous seront utiles pour résoudre les problèmes d'énergie et de travail. Parmi eux; la trigonométrie, le théorème de Pythagore et l'addition vectorielle.

Définition : La *puissance* est définie comme étant le montant de travail effectué en une certaine période de temps, ou encore, le rythme auquel l'énergie est utilisée. La puissance est une quantité *scalaire* et elle est mesurée en *Watt* (W), défini par 1 W = 1 J/s.

$$P = \frac{W}{t}$$

où W est le travail en Joules, P est la puissance en Watts et t est le temps en secondes pendant lequel le travail W a été fourni.

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

1. Une boîte de 50 kg est tirée sur une distance de 11 mètres le long d'une surface horizontale. La corde utilisée pour tirer la boîte fait un angle de 35º au-dessus du sol. Si la force exercée sur la boîte est de 90 N, quel est le travail accompli par cette force?
2. Un objet de 10 kg est poussé horizontalement sur une distance de 5 m. La force appliquée pour bouger l'objet est de 3 N. Quel est le travail accompli par cette force?
3. Un objet de poids 20 N est soulevé à vitesse constante jusqu'à une hauteur de 1.5 m. Quel est le travail accompli par la force gravitationnelle sur l'objet?
4. Expliquez la différence entre un travail positif et négatif.
5. Une boîte de 80 kg est poussée à vitesse constante le long d'un plan incliné sans friction. Le plan incliné a une hauteur de 7.0 m et une longueur de 10.0 m. Quelle quantité de travail une personne doit-elle fournir pour déplacer la boîte du bas du plan incliné jusqu'au haut du plan?
6. Une voiture de masse 1165 kg roule à 55 km/h au moment où le conducteur applique les freins. La voiture roule ensuite sur une distance de 38 m avant de s'arrêter. Quelle est la quantité de travail accomplie sur la voiture par la force de friction?
7. Quelle est la puissance d'un moteur pouvant fournir 15 kJ en 5 secondes?
8. Un athlète de 65 kg court pour atteindre le sommet d'une haute colline. Sa vitesse est constante et la colline fait un angle de 25° avec l'horizontale. En faisant sa course, l'athlète fournit une puissance de 2500 W. Combien de temps cela lui prendra-t-il pour parcourir une distance de 20 m sur le flan de la colline?
9. Un objet de 20 kg est soulevé verticalement, à vitesse constante, sur une hauteur de 2.5 m en 2 s. Si une étudiante soulève la boîte, quelle puissance doit-elle fournir?

Réponses : 1. 811 J; 2. 15 J; 3. -30 J; 5. 5500 J; 6. -140 000 J; 7. 3000 W; 8. 2.16 s; 9.122.6 W;

3. Travail effectué par une force constante

Définition (cas général) : L'expression la plus générale pour le *travail W* effectué par une force quelconque ***F*** le long d'une trajectoire arbitraire est donnée par une intégrale dite curviligne :

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

où $\vec{F}$ est le vecteur force et $d\vec{r}$ représente un élément infinitésimal de longueur.

Cette formule, que nous n'utiliserons pas dans son entièreté dans ce cours, consiste à découper la trajectoire en une infinité de segments droites infinitésimalement courts (de longueur dr), à prendre le produit scalaire avec la force en ce point et, finalement, de faire la somme (via l'intégrale) de toutes ces petites contributions.

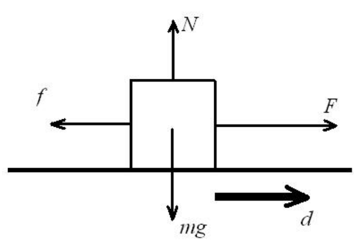
Définition (force constante): Un cas particulier de la relation ci-dessus est celui où la force ***F*** est constante, si le déplacement est donné par le vecteur ***s***, alors le travail causé par cette force est

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} \\ &= F \cdot s \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

avec θ étant l'angle *le plus petit* entre les vecteur ***F*** et ***s***.

Notez bien qu'à chaque force agissant sur un objet, il y a lieu de calculer le travail correspondant, c.-à-d. un travail est associé à chaque force.

Exemple : Si les forces ci-dessous agissent sur un bloc de façon à le faire se déplacer d'une distance *d* dans la direction de ***F***, calculez W_N, W_F, W_g et W_f.



Comme les forces F_N et *mg* sont perpendiculaires au déplacement, nous avons cos 90° = 0, de sorte que $W_N = 0$ J, et $W_g = 0$ J. Comme ***F*** est parallèle au déplacement, l'angle est zéro, et $W_F = Fd$. Finalement, la force de friction ***f*** est opposé au déplacement, de sorte que θ = 180°, ce qui nous donne $W_f = Fd$ cos 180° = - *Fd*.

Cet exemple nous montre que :

1. si la composante de la force est dans le *même sens* que le déplacement, alors on a un travail *positif*. En d'autres termes, une force effectue un *travail positif* si l'objet est *poussé*, c.-à-d. que la force contribue à le faire bouger dans le sens du déplacement.
2. si, au contraire, la force est dans le *sens opposé* au déplacement, alors on a un travail *négatif*. Autrement dit, une force effectue un *travail négatif* si l'objet est *retenu*, c.-à-d. que la force l'empêche de bouger dans le sens du déplacement.
3. finalement, si la force est *perpendiculaire* au déplacement, le travail est *nul*.

4. Théorème de l'énergie cinétique

Le concept de travail peut servir d'alternative aux lois de Newton pour résoudre des problèmes de dynamique, et ce, en utilisant le *théorème de l'énergie cinétique*. Cette approche, qui n'utilise que des quantités physique *scalaires*, n'est cependant pas complète pour résoudre tous les problèmes. Nous aurons aussi besoin du *principe de conservation de la quantité de mouvement*, qui sera discuté dans un chapitre ultérieur.

Supposons qu'un objet se déplace d'une distance *d* en ligne droite suite à l'action de forces dont la somme est F_{totale}. Le travail total est donné par

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= F_{\text{totale}} d \\ &= (ma)\, d \\ &= m\left[\frac{1}{2}\left(v^2 - {v_0}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \end{aligned}$$

La deuxième loi de Newton a été utilisé à la deuxième ligne, et l'équation de la cinématique $v^2 = {v_0}^2 + 2ad$ a permis d'obtenir la troisième ligne.

Définition : L'*énergie cinétique* E_K d'un objet de masse *m* qui se déplace à vitesse $\mathbf{v}$ par rapport à un système de référence, est donnée par

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2}$$

Dans un autre système de référence, la vitesse est différente, et l'énergie cinétique est aussi différente.

Le calcul un peu plus haut est une preuve du cas le simple du *théorème de l'énergie cinétique* :

$$(E_K)_f - (E_K)_i = W_{\text{total}}$$

C'est la version énergie de la deuxième loi de Newton.

Exemple : Un bloc de 4 kg glisse sur une surface de coefficient $\mu_K = 0.2$ à une vitesse de 30 cm/s. Quelle sera la vitesse du bloc après qu'il ait parcouru une distance de 1 cm?

Nous avons trois forces : la normale F_N, le poids mg et la friction F_K. Le travail associé au deux premières forces est zéro. Par conséquent, $W_{\text{total}} = W_{\text{friction}} = F_K\, d(\cos 180)$. Comme le frottement est donné par $F_K = \mu_K F_N = \mu_K mg$, nous avons $W_{\text{total}} = -\mu_K\, mgd$. Nous sommes prêts à utiliser le théorème de l'énergie cinétique, gardant en tête que nous cherchons la vitesse finale : $\frac{1}{2}mv^2 = W_{\text{total}} + \frac{1}{2}mv_0{}^2 = -\mu_K mgd + \frac{1}{2}mv_0{}^2$. En isolant nous trouvons

$v = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ cm/s.

5. Forces conservatives et énergie potentielle

Tout comme l'énergie cinétique est une « énergie de vitesse », l'énergie potentielle est en quelque sorte une « énergie de position » ou de « configuration », qui ne peut être définie que pour des forces dites « conservatives ».

Définition : Une *force conservative* $\boldsymbol{F}_{\text{C}}$ est telle que le travail accompli par cette force le long d'une trajectoire quelconque ne dépend que des points limites et non du parcours lui-même. Une force $\boldsymbol{F}_{\text{NC}}$ dont le travail dépend du parcours est donc dite *non-conservative*.

Ainsi, le travail accompli sur un objet par une force conservative $\boldsymbol{F}_{\text{C}}$ ne dépend que de la force et du déplacement. En d'autres mots, le chemin emprunté par l'objet, sur lequel la force $\boldsymbol{F}_{\text{C}}$ est appliquée, n'influence pas le travail accompli. Donc, si l'objet revient à son point de départ, le travail total accompli est nul, peu importe la trajectoire effectuée.

Définition : L'*énergie potentielle* E_P associée à une force conservative $\boldsymbol{F}_{\text{C}}$ est définie en termes du travail W_{C} effectué par cette force le long d'un parcours de la façon suivante :

$$\Delta E_P = (E_P)_f - (E_P)_i \equiv -W_C$$

Les indices *i* et *f* représente respectivement les points de départ et d'arrivée du parcours (initial, final). Faites bien attention au signe devant W_{C}!

Exemple : Calculez W_C et ΔE_P pour la force gravitationnelle : (a) pour un objet qui monte et (b) pour la descente.

Pour les deux cas, la force gravitationnelle est un vecteur de grandeur *mg* qui pointe *vers le bas*. Cependant les vecteurs déplacement ont des directions différentes :

(a) le déplacement est *vers le haut*, de sorte que W_C est *négatif*. Plus spécifiquement,

$$W_C = Fd\cos\theta = mgh\cos 180 = -mgh$$

où *h* est un nombre positif indiquant la distance parcourue vers le haut. Ainsi, de la définition d'énergie potentielle :

$$\Delta E_P = (E_P)_{haut} - (E_P)_{bas} = -W_C = mgh$$

Autrement, plus l'objet monte, plus son énergie potentielle augmente.

(b) le déplacement est *vers le bas*, de sorte que W_C est *positif*. Plus spécifiquement,

$$W_C = Fd\cos\theta = mgh\cos 0 = +mgh$$

où *h* est encore un nombre positif qui représente de quelle distance l'objet est descendu. Ainsi, l'énergie potentielle :

$$\Delta E_P = (E_P)_{bas} - (E_P)_{haut} = -W_C = -mgh$$

Ce qui est compatible avec la réponse en partie (a) : plus l'objet descend, plus son énergie potentielle diminue.

Exemple avancé : Calcul de l'énergie potentielle dans un ressort.

Une telle question ne pourrait pas vous être posée à l'examen, car la solution implique une intégrale. Par contre, la réponse nous sera très utile dans plusieurs problèmes. Des définitions d'énergie potentielle et de travail, nous avons

$$(E_P)_f - (E_P)_i = -W_C = -\int_i^f F_{\text{res}}\,\mathrm{d}x$$

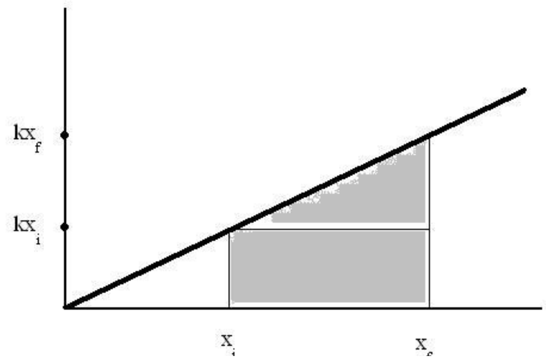
où $F_{\text{res}} = -kx$. Sachant qu'une intégrale

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Représente l'aire de la surface délimitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x, et les axes verticaux $x = x_1$ et $x = x_2$, l'expression ci-dessus devient

$$(E_P)_f - (E_P)_i = \int_i^f kx\,\mathrm{d}x$$

Il faut donc calculer l'aire de la région grise ci-dessous, qui comprend un rectangle de base $x_f - x_i$ et de hauteur kx_i, et un triangle de même base et de hauteur $kx_f - kx_i$:



L'aire totale est donc :

$$\begin{aligned}(E_P)_f - (E_P)_i &= \text{rectangle} + \text{triangle} \\ &= \left\{(x_f - x_i)kx_i\right\} + \left\{\frac{1}{2}(x_f - x_i)(kx_f - kx_i)\right\} \\ &= \frac{1}{2}kx_f{}^2 - \frac{1}{2}kx_i{}^2\end{aligned}$$

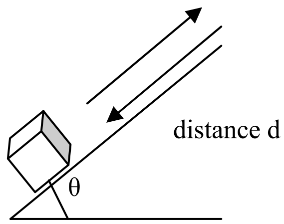
Plusieurs livres choisissent le zéro d'énergie potentielle $E_P(x_i) = 0$ pour $x_i = 0$, ce que implique l'importante relation

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2.$$

Exemple : Afin d'illustrer la différence entre des forces conservatives et des forces non-conservatives, considérons le travail total effectué au cours d'un aller-retour par deux forces : la force gravitationnelle et la friction.

Dans les deux cas, si le bloc reste sur place, alors le travail résultant est nul car le déplacement est nul. Si au bout d'un aller-retour, nous obtenons un travail non-nul, alors à coup sur la force est non-conservative (car un seul exemple suffit pour prouver qu'une force est non-conservative). Si on trouve un travail nul, la force a des chances d'être conservative, mais pour le prouver à coup sur, il faudrait considérer tous les parcours possibles.

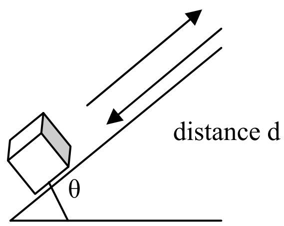
a) *Travail par la gravité au cours d'un aller-retour sur un plan incliné*



$W_{\text{gravité}} = W_{\text{montée}} + W_{\text{descente}}$
$=$
$=$

On ne peut donc en déduire que la gravitation est une force non-conservative. Donc, par antagonisme, la force gravitationnelle est conservative. C'est la raison pour laquelle on peut définir E_P.

b) *Travail par la friction au cours d'un aller-retour sur un plan incliné avec friction*



$W_{\text{friction}} = W_{\text{montée}} + W_{\text{descente}}$
$=$
$=$ ou $\neq 0$?

Nous pouvons donc conclure que la force de friction est non-conservative. Seul cet exemple suffit. On ne peut donc pas définir d'énergie potentielle de friction!

6. Principe de conservation de l'énergie mécanique totale

Définition : L'*énergie mécanique totale* d'un système de particules est la somme de l'énergie cinétique de toutes les particules et de tous les types d'énergies potentielles (ressort, potentielle, gravitationnelle, etc.) présents dans le système.

Le principe de conservation de l'énergie mécanique totale n'est pas vraiment nouveau, car il n'est qu'une nouvelle du théorème de l'énergie cinétique. Écrivons

$$W_{\text{total}} = W_{\text{C}} + W_{\text{NC}}$$

où W_{C} représente le *travail total effectué par toutes les forces conservatives*, alors que W_{NC} représente le *travail total par toutes les forces non-conservatives*.

Si l'on considère l'action des forces entre le temps t_i et le temps t_f, alors la variation d'énergie potentielle totale (c.-à-d. somme des énergies potentielles correspondant à chaque force conservative), nous avons $\Delta E_P = (E_P)_f - (E_P)_i = W_C$. Si on utilise maintenant le théorème

de l'énergie cinétique, $\Delta E_K = (E_K)_f - (E_K)_i = W_{\text{total}} = W_C + W_{NC}$, nous obtenons

$$\Delta E_K = -\Delta E_P + W_{NC}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\Delta E_K + \Delta E_P = W_{NC}$$

ou encore

$$(E_K)_f + (E_K)_f = (E_K)_i + (E_K)_i + W_{NC}$$

<u>Définition :</u> Selon la première définition de cette section, l'énergie mécanique totale E s'écrit comme suit

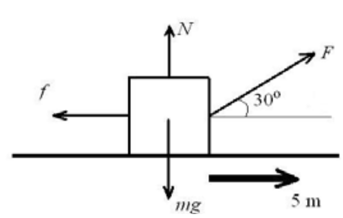
$$\boxed{E = E_K + E_P}$$

Ainsi, le principe de conservation de l'énergie mécanique totale s'écrit

$$\boxed{E_f = E_i + W_{NC}}$$

<u>7. Exemples</u>

Exemple : Une force $\boldsymbol{F}$ de 200 N tire un bloc de 70 kg à angle 30° sur une surface rugueuse dont $\mu_k = 0.25$. (a) Si une distance de 5 m vers la droite est parcourue, calculez W_F, W_{friction}, W_{poids} et W_{normale}. (b) Si le bloc part du repos, quelle est sa vitesse finale?



(a) $W_F =$ ______________________ Joules

$W_{\text{friction}} =$ _______ où $f = \mu_K N$ et $N + F\sin\theta - mg = 0$, ce qui nous donne

$W_{\text{friction}} =$

$= 0.25[(70)(9.8)-(200)(\sin 30)](5)\cos 180 = -733$ Joules

$W_{\text{poids}} = 0$ Joules $= W_{\text{normale}}$ car les forces sont perpendiculaires au déplacement.

(b) $\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - 0 = W_{\text{total}} = 866 - 733 = 133$ Joules, qui donne $v_f = 1.95$ m/s

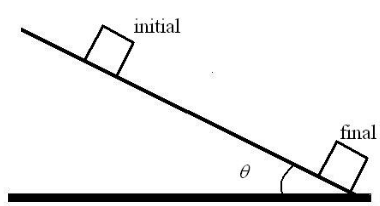
Exemple : Retour à l'exemple de la page 7 du chapitre *Cinématique à deux dimensions*. Calculons la vitesse lorsque la balle touche au sol, avec le principe de conservation de l'énergie.

Ici, nous négligeons les effets de la friction, donc $W_{NC} = 0$. La conservation de l'énergie nous donne

$\Delta E_K + \Delta E_P = 0 = \left(\frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_i^{\,2}\right) + \left(mgh_f - mgh_i\right)$ d'où nous trouvons

$v_f = \sqrt{v_i^{\,2} + 2g\left(h_i - h_f\right)} = 37$ m/s. Cependant, la direction est inconnue.

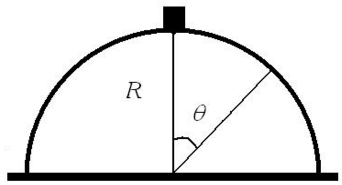
Exemple : La figure ci-dessous représente un bloc de 3 kg qui glisse vers le bas d'une pente rugueuse inclinée de 30 degrés. Si la force de friction est de 5 N, et que le bloc se déplace initialement à 50 cm/s vers le bas, calculez la vitesse du bloc quand il aura descendu de 1 m le long du plan.



Nous utilisons $\Delta E_K + \Delta E_P = W_{NC}$, avec $\Delta E_K = \frac{1}{2}m\left(v_f^{\,2} - v_i^{\,2}\right)$, $\Delta E_P = mg\left(h_f - h_i\right)$ et $W_{NC} = -fd$, ce qui devient $\frac{1}{2}m\left(v_f^{\,2} - v_i^{\,2}\right) + mg\left(h_f - h_i\right) = -fd$. Comme $h_f - h_i = -d\sin\theta$, la vitesse finale est donnée par l'expression

$$v_f = \sqrt{\qquad\qquad\qquad} = 2.59 \text{ m/s}.$$

Exemple : Un objet glisse, à partir du repos, le long d'une surface sphérique sans friction (figure ci-dessous). À quel angle quittera-t-il la surface?



Comme il n'y a pas de friction, $W_{NC} = 0$, et l'équation de conservation de l'énergie prend la forme :

$$\Delta E_K + \Delta E_P = 0$$

qui devient, avec $v_i = 0$ et $h_f - h_i = -(R - R\cos\theta)$:

$$\frac{1}{2}mv_f^{\ 2} - mg(R - R\cos\theta) = 0$$

où v_f est la vitesse du projectile au moment de quitter la surface, et la variable à éliminer de l'équation. Nous le ferons à l'aide de l'équation de Newton; comme il y a un mouvement *circulaire*, il s'agit de l'*accélération centripète*. Avant de quitter la surface, cette équation se lit : $\Sigma F =$ ________ $= \dfrac{mv^2}{R}$. « Quitter la surface » implique $F_N = 0$, de sorte que l'équation se ramène à $v^2 =$ _________ . En remplaçant pour v_f dans l'équation plus haut, nous trouvons

$$\frac{1}{2}mgR\cos\theta - mg(R - R\cos\theta) = 0$$

qui donne $\cos\theta =$ _____ , d'où la réponse : $\theta = 48.2°$.

8. Test formatif

1. Quelle est la force moyenne nécessaire pour arrêter une balle de fusil pénétrant un morceau de bois? La balle pèse 20g et a une vitesse initiale de 250 m/s. De plus, la balle s'enfonce dans le bois sur une distance de 12 cm.
2. Une boîte pesant 50 kg est tirée sur une distance de 40m le long d'une surface horizontale. La force appliquée pour tirer la boîte est constante et a une valeur de 100N. De plus, le plancher est rugueux et exerce une force de friction de 50 N.
   a) Calculez le travail fait par chacune des forces agissant sur la boîte.
   b) Calculez le travail net fait sur la boîte.
3. Un randonneur transporte son sac à dos pesant 15.0 kg le haut d'une colline de 10 m de hauteur.
   a) Calculez le travail que le randonneur doit fournir pour transporter son sac.
   b) Calculez le travail fait par la force de gravité sur le sac à dos.
   c) Calculez le travail net accompli sur le sac à dos
4. Une balle de baseball pèse 145g. Un joueur la lance avec une vitesse initiale de 25 m/s.
   a) Quelle est l'énergie cinétique de la balle?
   b) Quelle quantité de travail a été accomplie par le joueur pour que la balle (qui était initiallement au repos) puisse atteindre une vitesse de 25 m/s?
5. Quelle quantité de travail est nécessaire pour pousser une voiture de 1250 kg sur une distance de 105 m?
   a) en ignorant la friction
   b) en assumant un coefficient de friction de 0.10
6. Une femme pesant 50 kg monte les escaliers pour atteindre une hauteur de 4.0 m. Si on considère qu'au point de départ de la femme, la hauteur est de 0 m, quelle quantité de travail la femme doit-elle fournir?
7. Un véhicule spatial pesant 1500 kg s'effondre sur la surface terrestre. Quelle quantité de travail est fournie par la force gravitationnelle si le véhicule était initiallement à 3 000 km au-dessus du sol?
8. Combien de travail doit être fourni pour ralentir une voiture de 100 km/h à 30 km/h? La masse de la voiture est de 1000 kg.
9. Quelle quantité de travail doit être fournie pour accélérer un électron initiallement au repos jusqu'à une vitesse de 5.0×10^6 m/s? La masse d'un électron est de 9.11×10^{-31} kg.
10. Une voiture de 1200 kg roule à une vitesse de 50 km/h. Soudainement, la voiture entre en collision avec un ressort géant qui réussit à l'arrêter après un déplacement de 2.5m. Quelle est la constante d'élasticité du ressort?
11. La cabine d'un ascenseur pèse 700 kg et est suspendue à 25 m au-dessus d'un ressort géant ayant un $k = 8.0 \times 10^4$ N/m.
    a) calculez le travail fait par la force gravitationnelle sur la cabine juste avant que cette dernière touche le ressort.
    b) Calculez la vitesse de la cabine juste avant qu'elle touche le ressort.
    c) Calculez le déplacement (compression) du ressort lorsque la cabine tombe dessus

12. Un bloc de 5 kg est poussé sur une distance de 3 m vers le haut d'un plan incliné très rugueux par une force constante de 75 N. Le plan est incliné à 37°, la force de friction cinétique est de 20 N et le bloc a une vitesse initiale de 2.2 m/s vers le haut du plan incliné.
    a) Calculez l'énergie cinétique initiale du bloc
    b) Calculez le travail accompli par la force appliquée (75N)
    c) Calculez le travail accompli par la force de friction (20 N)
    d) Calculez le travail accompli par la force gravitationnelle
    e) Calculez le travail accompli par la force normale
    f) Calculez l'énergie cinétique finale du bloc

Réponses

1. la force moyenne nécessaire est de 5200 N. Cette force est approximativement 30 000 fois la masse de la balle du fusil. Puisque cette balle avait une énergie cinétique initiale de 620 joules, la majorité de cette énergie est perdue en chaleur et en travail pour déformer le bois.
2. Le travail fait par la force de friction est de -2000 J (valeur négative puisque cette force s'oppose au mouvement de la boîte). Le travail fait par la force appliquée est de 3200 J. Le travail net fait sur la boîte est de 1200J. Notez que le travail fait par la force gravitationnelle est nul, tout comme celui fait par la force normale.
3. a) Le travail fait par le randonneur est de 1470 J
   b) Le travail fait par la force de gravité est de –1470 J
   c) Le travail net fait sur le sac à dos est de 0 J
4. L'énergie cinétique est de 45 J et le travail fourni par le joueur est de 45 J (en négligeant la résistance de l'air).
5. a) 300 kJ
   b) 425 kJ
6. 1960 J
7. 3×10^{10} J
8. –350 kJ
9. 1.14×10^{-17} J
10. 3.7×10^{4} N/m
11. a) 1.7×10^{5} J
    b)22 m/s
    c) 2.2m
12. a) 12J
    b) 180 J
    c) -60 J
    d) -89J
    e) 0
    f) 43 J

Collisions et quantité de mouvement

1. Rappel de Physique 20 et 30

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

3. Impulsion et quantité de mouvement

Lorsqu'un objet, par exemple, une balle, frappe un mur ou le sol, la force exercée par le mur sur la balle varie en fonction du temps. Égale à zéro avant et après le contact avec la balle, cette force croît après le contact pour atteindre une valeur maximale et se mettre à décroître pour atteindre zéro de nouveau. Comme nous le verrons, l'effet de la collision n'est pas mesuré seulement par cette force, mais aussi par le temps de contact de la balle avec le sol. Le produit de la force et du temps de contact mène au concept d'impulsion.

Définition : Si un objet subit l'action d'une force variable pendant un certain temps Δt, alors l'*impulsion* $\vec{I}$ à laquelle est soumise cet objet est donnée par

$$\vec{I} \equiv \vec{F}_{\text{moy}} \Delta t$$

où $\vec{F}_{\text{moy}}$ est la force moyenne exercée *sur l'objet* pendant la durée de l'interaction.

Question : Quelles sont les unités de l'impulsion $\vec{I}$?

Suite à l'impact, la vitesse de l'objet change, et passe de $\vec{v}_{\text{i}}$ à $\vec{v}_{\text{f}}$, de sorte que l'accélération moyenne est donné par

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\vec{v}_{\text{f}} - \vec{v}_{\text{i}}}{\Delta t}$$

De la deuxième loi de Newton, nous trouvons

$$\vec{F}_{\text{moy}} = m\vec{a}_{\text{moy}} = m\left(\frac{\vec{v}_{\text{f}} - \vec{v}_{\text{i}}}{\Delta t}\right) = \frac{m\vec{v}_{\text{f}} - m\vec{v}_{\text{i}}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_{\text{f}} - \vec{p}_{\text{i}}}{\Delta t}$$

où $\vec{p}$ est une vecteur appelé quantité de mouvement.

Exemple : De la pluie tombe perpendiculairement sur le sol à une vitesse de $\vec{v}_0 = -15$ m/s. Le débit auquel la pluie frappe le sol est de 60 g/s. En supposant que l'eau reste au repos après avoir frappé le sol, calculez la force moyenne exercée sur le sol par la pluie.

Solution : La relation précédente nous donne la force sur l'eau :

$$\vec{F}_{\text{moy}} = \frac{m\vec{v}_{\text{f}} - m\vec{v}_{\text{i}}}{\Delta t} = \frac{\vec{0} - m\vec{v}_0}{\Delta t} = -\left(\frac{m}{\Delta t}\right)\vec{v}_0$$

où le terme $\frac{m}{\Delta t} = 60$ g/s = 0.06 kg/s est le débit d'eau. La troisième loi de Newton nous indique que la force moyenne sur le sol vaut donc

$$\left(\vec{F}_{\text{moy}}\right)_{\text{sur sol}} = \left(\vec{F}_{\text{moy}}\right)_{\text{sur eau}} = \left(\frac{m}{\Delta t}\right)\vec{v}_0 = \qquad \text{N.}$$

Dans des problèmes impliquant un fluide, il est commun de rencontrer des expressions analogues au débit $\frac{m}{\Delta t}$.

<u>Définition :</u> La quantité de mouvement d'un objet de masse *m* se déplaçant à vitesse $\vec{v}$ par rapport à un certain repère, est donnée par

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

<u>Théorème impulsion – quantité de mouvement :</u> Le raisonnement ci-dessus conduit au résultat suivant

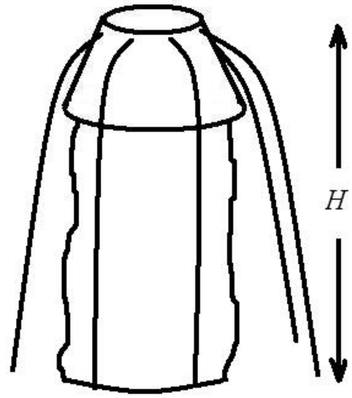
$$\vec{I} = \vec{p}_{\text{f}} - \vec{p}_{\text{i}} = \Delta\vec{p}$$

<u>Relation entre la force et la quantité de mouvement :</u> En combinant les définitions précédentes, nous trouvons

$$\vec{F}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad \xrightarrow{\Delta t \to 0} \quad \vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{F}_{\text{moy}} = \frac{\text{d}\vec{p}}{\text{dt}}.$$

Pour celles/ceux qui connaissent la dérivée, nous voyons donc que la force est le taux de variation de quantité de mouvement.

<u>Exemple :</u> Cet exemple implique un débit d'eau, décrit précédemment par $\frac{m}{\Delta t}$. La figure ci-dessous représente un jet d'eau dirigé verticalement vers le haut, à un taux égal à 0.7 kg/s. Ce jet monte jusqu'à une hauteur de 4 m quand il n'y a pas d'obstacle sur son chemin. On place sur le même jet une chaudière de masse *M* = 0.2 kg qui, trouée dans sa partie supérieure, laisse couler l'eau horizontalement dans toutes les directions. À quelle hauteur *H* montera le jet d'eau en présence de la chaudière?



Solution : Le principe de base est un changement de quantité de mouvement de l'eau, dont la composante verticale (initialement vers le haut) passe à zéro, à cause du poids de la chaudière.

Il faut premièrement calculer la vitesse v_0 de l'eau au niveau du sol, sachant qu'elle arrête à une hauteur de 4 m. L'équation $v^2 = v_0{}^2 - 2gH$ donne $v_0 = \sqrt{2gH} = 8.85$ m/s, sans chaudière.

Lorsqu'on place une chaudière de masse *M*, son poids est une force exercée sur l'eau et qui cause un changement de quantité de mouvement de l'eau. Nous avons vu ci-dessus que $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta \mathrm{t}} = \dfrac{\Delta(mv)}{\Delta \mathrm{t}} = v\dfrac{\Delta m}{\Delta \mathrm{t}}$, où $\dfrac{\Delta m}{\Delta \mathrm{t}} = 0.7$ kg/s. Nous désignons par *v* la vitesse au niveau de la chaudière. D'autre part, la force est causée par le poids de la chaudière, c.-à-d. *F* = *Mg*. Nous obtenons ainsi

$$v = \frac{Mg}{\left(\dfrac{\Delta m}{\Delta \mathrm{t}}\right)} = \frac{(0.2\,\mathrm{kg})(9.81\,\mathrm{m/s^2})}{(0.7\,\mathrm{kg/s})} = 2.80\,\mathrm{m/s}.$$

Nous pouvons donc calculer la hauteur du jet d'eau en présence de la chaudière :

$$H = \frac{v_0{}^2 - v^2}{2g} = \frac{(8.85)^2 - (2.80)^2}{2(9.81)} = 3.60\,\mathrm{m}.$$

Comparé à 4 m sans chaudière, le jet d'eau s'élève donc à 3.60 m avec la chaudière.

<u>Cas général :</u> Dans l'exemple précédent, remplaçons la masse de la chaudière par *M*, le débit par φ, et la hauteur du jet sans chaudière par h_0. La vitesse de l'eau au sol sans chaudière vaut donc

$$v_0{}^2 = 2gh_0.$$

L'eau exerce sur la chaudière une force vers le haut donnée par

$$F_{\text{chaud/eau}} = -F_{\text{eau/chaud}} = -\frac{\Delta p}{\Delta \mathrm{t}} = -v\frac{\Delta m}{\Delta \mathrm{t}} = -v\varphi$$

L'autre force subie par la chaudière est due à la gravité et pointe vers le bas :

$$F_{\text{chaud/grav}} = Mg\,.$$

La force totale sur la chaudière, qui est au repos, vaut donc

$$\vec{F}_{\text{chaud/eau}} + \vec{F}_{\text{chaud/grav}} = -v\varphi + Mg = 0$$

d'où

$$v = \frac{Mg}{\varphi}\,.$$

Les équations de la cinématique nous donnent

$$H = \frac{v_0{}^2 - v^2}{2g} = \frac{(2gh_0) - \left(\frac{Mg}{\varphi}\right)^2}{2g} = h_0 - \frac{M^2 g}{2\varphi^2}\,.$$

4. Conservation de quantité de mouvement

Considérons un système de N particules interagissant entre elles, et subissant l'action de forces extérieures. Par exemple, vous pouvez penser à deux rondelles sur une surface lisse et inclinée; la force externe est alors la force de gravité, qui peut agir parce que la table est inclinée.

La force totale agissant sur cet ensemble de particules est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{totale}} &= \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{N} \left(\vec{F}_{\mathrm{ij}} + \vec{F}_{\mathrm{i,ext}}\right) \\
&= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots \vec{F}_{1\mathrm{N}} + \vec{F}_{1,\mathrm{ext}} + \vec{F}_{21} + \cdots + \vec{F}_{2,\mathrm{ext}} + \cdots \\
&= \vec{F}_{1,\mathrm{ext}} + \vec{F}_{2,\mathrm{ext}} + \cdots + \vec{F}_{\mathrm{N,ext}}, \quad \text{car } \vec{F}_{\mathrm{ij}} + \vec{F}_{\mathrm{ji}} = \vec{F} \\
&= \vec{F}_{\mathrm{tot,ext}} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}
\end{aligned}$$

où nous avons défini

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_N$$

comme étant la quantité de mouvement totale du système. Par conséquent, si la force totale externe est nulle (par ex., si la surface mentionnée plus haut est parfaitement horizontale), alors nous voyons que

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{P} = \vec{0}, \text{ ou } \vec{P}_{\text{avant}} = \vec{P}_{\text{après}}$$

Ceci implique que

$$\vec{p}_{1,\text{f}} + \cdots + \vec{p}_{N,\text{f}} = \vec{p}_{1,\text{i}} + \cdots + \vec{p}_{N,\text{i}}$$

ou

$$m\vec{v}_{1,\text{f}} + \cdots + m\vec{v}_{N,\text{f}} = m\vec{v}_{1,\text{i}} + \cdots + m\vec{v}_{N,\text{i}}$$

5. Collisions à une dimension

Définitions :

- Une collision est dite *élastique* si la quantité de mouvement totale et l'énergie cinétique totale sont toutes deux conservées.
- Une collision est *inélastique* si l'énergie cinétique totale n'est pas conservée, c.-à-d . qu'elle diminue.
- Nous parlons de collision *superélastique* si l'énergie cinétique totale augmente suite à la collision.
- Une collision est *parfaitement inélastique* si les objets restent collés ensemble après la collision.

Exemple : Deux masses, m_1=300 g et m_2=200 g se déplacent vers la droite à des vitesses respectives de v_1=15 cm/s et v_2=10 cm/s. Après la collision, on observe que m_1 se déplace vers la gauche à 5 cm/s. (a) Quelle est la vitesse de la masse m_2? (b) La collision est-elle élastique?

Solution : La conservation de quantité de mouvement se lit

$$m_1 v_{1,\text{f}} + m_2 v_{2,\text{f}} = m_1 v_{1,\text{i}} + m_2 v_{2,\text{i}}$$

ce qui nous donne $v_{2,\text{f}} = \dfrac{m_1\left(v_{1,\text{i}} - v_{1,\text{f}}\right) + m_2 v_{2,\text{i}}}{m_2} = \dfrac{(300)(15-(-5)) + (200)(10)}{200} = 40 \text{ cm/s}$.

Exemple : Prouver que, suite à une collision élastique, la direction relative de la vitesse des masses est inversée. En d'autres termes, si l'objet 1 voit l'objet 2 arriver à une vitesse v, alors après la collision, il verra l'objet 2 repartir à vitesse v dans le sens opposé.

Solution : Par définition une collision élastique conserve la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. La conservation de quantité de mouvement se lit :

$$m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}} = m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}$$

ou encore,

$$m_2 \left(v_{2,\mathrm{f}} - v_{2,\mathrm{i}}\right) = m_1 \left(v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}}\right)$$

Quant à l'énergie cinétique, nous avons :

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_{1,\mathrm{f}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2,\mathrm{f}}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_{1,\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2,\mathrm{i}}\right)^2 .$$

On peut récrire cette équation sous la forme :

$$\frac{1}{2} m_1 \left[\left(v_{1,\mathrm{i}}\right)^2 - \left(v_{1,\mathrm{f}}\right)^2\right] = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(v_{2,\mathrm{f}}\right)^2 - \left(v_{2,\mathrm{i}}\right)^2\right]$$
$$m_1 \left(v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}}\right)\left(v_{1,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}}\right) = m_2 \left(v_{2,\mathrm{f}} - v_{2,\mathrm{i}}\right)\left(v_{2,\mathrm{f}} + v_{2,\mathrm{i}}\right)$$

Remarquez que les deux premiers facteurs de chaque côté de l'équation sont égaux, d'après la conservation de quantité de mouvement, d'où

$$\left(v_{1,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}}\right) = \left(v_{2,\mathrm{f}} + v_{2,\mathrm{i}}\right)$$

c.-à-d.

$$v_{1,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{i}} = -\left(v_{1,\mathrm{f}} - v_{2,\mathrm{f}}\right)$$

ce qui signifie que la vitesse relative change de signe.

Exemple : Un objet 1 de une vitesse +5 m/s entre en collision élastique avec un objet 2 qui se déplace à +2 m/s. Si, après la collision, l'objet 1 a pour vitesse +3 m/s, quelle est la vitesse de l'objet 2?

Solution : L'objet 1 voit l'objet 2 s'approcher à une vitesse 3 m/s. Après la collision, il le voit donc s'éloigner à 3 m/s. Comme l'objet a une vitesse finale de +3 m/s, l'objet 2 a donc une vitesse finale de +6 m/s.

La formule nous permet de vérifier ce résultat :

$$v_{2,\mathrm{f}} = v_{1,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}} = (+5) - (2) + (3) = +6 \text{ m/s.}$$

6. Collisions à deux dimensions

Pour les collisions impliquant deux objets, il faut satisfaire les équations suivantes :

$$m_1 (v_{1,\mathrm{f}})_x + m_2 (v_{2,\mathrm{f}})_x = m_1 (v_{1,\mathrm{i}})_x + m_2 (v_{2,\mathrm{i}})_x ,$$

$$m_1 (v_{1,\mathrm{f}})_y + m_2 (v_{2,\mathrm{f}})_y = m_1 (v_{1,\mathrm{i}})_y + m_2 (v_{2,\mathrm{i}})_y .$$

Exemple : Le 25 juillet 1956, le paquebot *Andrea Doria*, de masse 4.1×10^7 kg entra en collision avec le bateau *Stockholm*, de masse 1.7×10^7 kg, lors d'une collision parfaitement inélastique. (a) Quelle était leur vitesse finale commune, sachant que l'*Andrea Doria* se déplaçait à 40 km/h vers l'ouest, tandis que le *Stockholm* allait à 30 km/h à 20º à l'est du nord? (b) Calculez la perte d'énergie cinétique due à la collision.

Solution : (a) Nous utilisons

$$(m_1 + m_2)\vec{v}_{\mathrm{f}} = m_1 \vec{v}_{1,\mathrm{i}} + m_2 \vec{v}_{2,\mathrm{i}}$$

Composante *x* : $(m_1 + m_2) v_{\mathrm{f,x}} = m_1 (v_{1,\mathrm{i}})_x + m_2 (v_{2,\mathrm{i}})_x$

$$(\qquad\qquad) v_{\mathrm{f,x}} = (4.1 \times 10^7)(\qquad) + (1.7 \times 10^7)(\qquad)$$

qui donne $v_{\mathrm{f,x}} = -$ km/h.

Composante *y* : $(m_1 + m_2) v_{\mathrm{f,y}} = m_1 (v_{1,\mathrm{i}})_y + m_2 (v_{2,\mathrm{i}})_y$

$$(\qquad\qquad) v_{\mathrm{f,y}} = (4.1 \times 10^7)(\qquad) + (1.7 \times 10^7)(\qquad)$$

qui donne $v_{\mathrm{f,y}} = 8.26$ km/h. La vitesse finale des deux bateaux est donc

$$\vec{v}_{\mathrm{f}} = (- \quad , \quad) \text{ km/h ou } \quad \text{ km/h à l'ouest du nord.}$$

(b) Avant la collision, nous utilisons

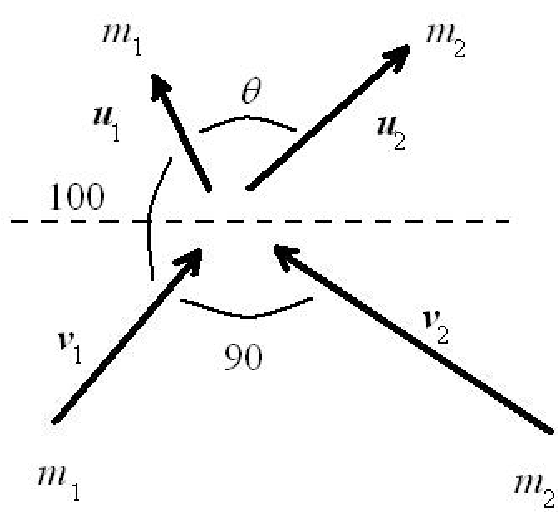
$$K_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,\mathrm{i}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,\mathrm{i}})^2 = \quad \text{J}$$

et après, nous avons

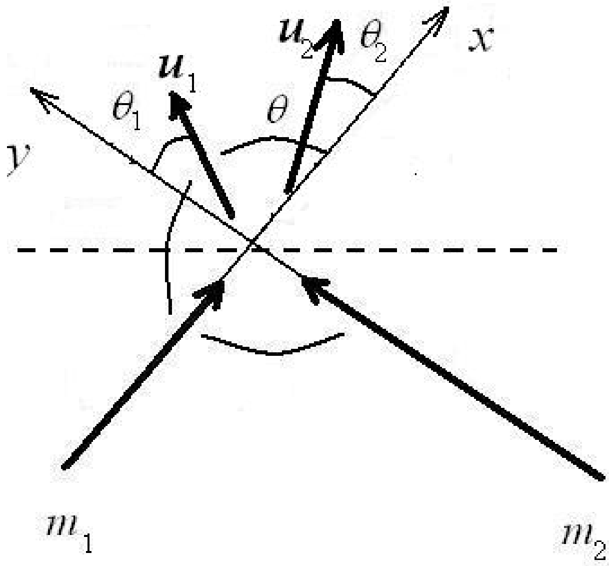
$$K_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)(v_{2,\mathrm{f}})^2 = \quad \text{J}$$

de sorte que $\Delta K = K_{\mathrm{f}} - K_{\mathrm{i}} = - \quad$ J.

<u>Exemple :</u> Cet exemple est semblable à votre expérience de laboratoire. Deux masses, m_1 = 200 g et m_2 = 150 g, se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre à des vitesses v_1 = 50 cm/s et v_2 = 75 cm/s. Après la collision, m_1 dévie de 100º et sa vitesse vaut u_1 = 30 cm/s. Quelle est la vitesse (grandeur et direction) finale de m_2?



Solution : Choisissons l'axe x parallèle à $\boldsymbol{v}_1$, et l'axe y parallèle à $\boldsymbol{v}_2$. De cette façon, le vecteur $\boldsymbol{u}_1$ pointe à θ_1 = 10 degrés à droite des y positifs. Désignons par θ_2 l'angle entre le vecteur $\boldsymbol{u}_2$ et l'axe des x. Le tout est représenté à la figure ci-dessous :



L'équation de la conservation de quantité de mouvement devient :

Composante x : $m_1 v_1 + 0 = m_1 u_1 \sin\theta_1 + m_2 u_2 \cos\theta_2$

Composante y : $0 + m_2 v_2 = m_1 u_1 \cos\theta_1 + m_2 u_2 \sin\theta_2$

La première équation nous donne : $m_2 u_2 \cos\theta_2 = m_1(v_1 - u_1 \sin\theta_1)$, et la seconde, $m_2 u_2 \sin\theta_2 = m_2 v_2 - m_1 u_1 \cos\theta_1$. En divisant ces dernières équations l'une par l'autre, nous obtenons

$$\tan\theta_2 = \frac{m_2 u_2 \sin\theta_2}{m_2 u_2 \cos\theta_2} = \frac{m_2 v_2 - m_1 u_1 \cos\theta_1}{m_1(v_1 - u_1 \sin\theta_1)}$$

d'où nous obtenons $\theta_2 = 30.80494346°$ et, par conséquent, $\theta = 49.2°$.

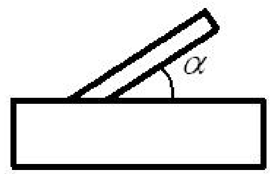
Pour trouver la grandeur de $\boldsymbol{u}_2$, on remplace θ_2 dans $m_2 u_2 \cos\theta_2 = m_1(v_1 - u_1 \sin\theta_1)$ ou $m_2 u_2 \sin\theta_2 = m_2 v_2 - m_1 u_1 \cos\theta_1$. Ou encore, on calcule :

$$(m_2 u_2)^2 = (m_2 u_2 \sin\theta_2)^2 + (m_2 u_2 \cos\theta_2)^2 = (m_2 v_2 - m_1 u_1 \cos\theta_1)^2 + (m_1(v_1 - u_1 \sin\theta_1))^2$$

ce qui donne u_2 = 69.5 cm/s.

Exemple : Cet exemple illustre la conservation de la quantité de mouvement ainsi que le concept de vitesse relative, discuté à la section 5 du chapitre *Cinématique à deux dimensions*.

Soit un canon de masse M et incliné d'un angle α, contenant un boulet de masse m.



(a) Si le boulet est éjecté à une vitesse V par rapport au canon, quelle est la vitesse de recul v du canon par rapport au sol?

(b) Par rapport au sol, à quel angle le boulet est-il éjecté du canon?

Solution : (a) En utilisant la notion de la section 5 du chapitre *Cinématique à deux dimensions*, nous avons

$v_{\mathrm{mM}} = V$: vitesse du boulet par rapport au canon
$v_{\mathrm{M/sol}} = v$: vitesse du canon par rapport au sol
$v_{\mathrm{m/sol}} = ?$: vitesse du boulet par rapport au sol

qui sont reliés par

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{m/sol}} &= \vec{v}_{\mathrm{mM}} + \vec{v}_{\mathrm{M/sol}} \\ &= (V\cos\alpha, V\sin\alpha) + (-v, 0) = (\qquad\qquad , \qquad\qquad)\end{aligned}$$

La conservation de quantité de mouvement nous donne :

$$\begin{aligned}\sum p_{x,\mathrm{avant}} &= \sum p_{x,\mathrm{apres}} \\ 0 &= m(V\cos\alpha - v) - Mv\end{aligned}$$

d'où

$$v = \frac{mV\cos\alpha}{M+m}.$$

(b) La direction du boulet par rapport au sol est obtenue des composantes du vecteur vitesse de la façon habituelle :

$$\tan\theta = \frac{(v_{\text{m/sol}})_y}{(v_{\text{m/sol}})_x} = \frac{V\sin\alpha}{V\cos\alpha - v} = \frac{V\sin\alpha}{V\cos\alpha - \left(\dfrac{mV\cos\alpha}{M+m}\right)} = \frac{M+m}{M}\tan\alpha$$

On remarque facilement que $\theta = \alpha$ lorsque $m << M$.

7. Test formatif

Dynamique de rotation

1. Rappel de Physique 20 et 30

Introduction au mouvement de rotation autour d'un axe fixe

On définit un *corps solide* comme étant un objet ayant une forme fixe. En réalité, un corps rigide vibrera ou se déformera si on y applique une force. Cependant, les effets seront considérés négligeables dans cette section.

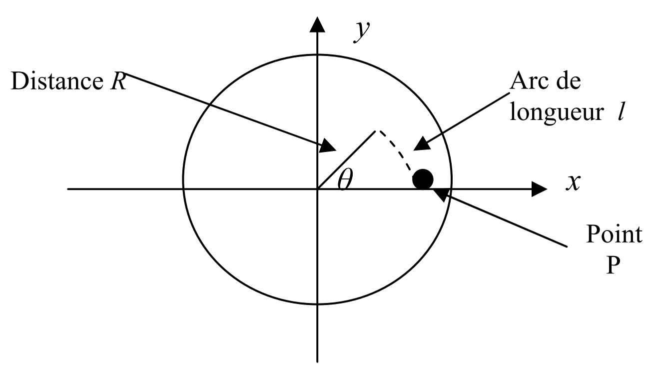
Par le *principe du corps solide idéal*, nous assumons que *tout objet n'est pas vraiment influencé (déformation, vibration etc.) par les forces qui y sont appliquées*. Tout comme le principe de conservation de l'énergie ou celui de l'approximation des petits angles, le principe du corps solide idéal donne une bonne approximation dans la plupart des cas.

Tout comme en géométrie, tout mouvement d'un corps solide peut être séparé en deux transformations géométriques simples.

$$\begin{array}{c} \text{mouvement du corps solide} \\ = \\ \text{translation du centre de masse (c.m)} \\ + \\ \text{rotation du corps solide autour du} \\ \text{centre de masse (c.m)} \end{array}$$

L'*axe de rotation* est décrit comme étant un point ou un axe autour duquel tournent à une même vitesse tous les points d'un corps solide.

Équations de la cinématique de rotation



R : distance entre un point P quelconque de l'objet et l'axe de rotation
L : distance (arc) couverte par l'angle de rotation θ
θ: angle de rotation du corps solide

La dynamique de rotation n'est qu'une autre manière de voir le mouvement d'un objet. Ce mouvement est le plus souvent décrit par une trajectoire circulaire par simplicité. C'est pourquoi il existe une correspondance entre les équations linéaires et angulaires de la cinématique.

<u>Équations angulaires</u>	<u>Équations linéaires</u>
$\omega = \omega_o + \alpha t$	$v = v_o + \frac{1}{2}at^2$
$\theta - \theta_o = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$(x - x_o) = v_o t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$	$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$

Comme pour les équations linéaires de la cinématique, les équations angulaires sont valides si l'accélération angulaire est uniforme. De plus, veuillez noter que dans la plupart des cas, nous utiliserons $\theta_0 = 0$ et $x_0 = 0$, ce qui simplifiera les équations ci-dessus.

D'après les règles de correspondance entre les deux formes d'équations de la cinématique, on obtient :

(1) $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	ω est la vélocité angulaire (rad/s)
(2) $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	α est l'accélération angulaire (rad/s^2)
(3) $v = R\omega$	v est la vélocité linéaire (m/s)
(4) $a_T = R\alpha$	a_T est l'accélération linéaire tangentielle (m/s)
(5) $a_R = \omega^2 R$	a_R est l'accélération linéaire radiale (m/s)

<u>Concept de moment de force ou de torque</u>

Selon la première loi de Newton, une force est nécessaire pour qu'un objet se mette à tourner autour d'un axe de rotation. Cependant, dans le cas du mouvement angulaire, la *direction de la force* et *l'endroit où elle est appliquée* sont importants.

Pour la deuxième loi de Newton, l'équivalent angulaire est un peu plus difficile à définir. Il faut donc aussi considérer que l'accélération angulaire est directement proportionnelle à la magnitude de la force et de la distance entre l'objet et l'axe de rotation. Cette distance entre l'objet et l'axe de rotation est appelée *bras de levier* (en anglais, *lever arm*), tel que vu en Sciences 9 dans l'unité sur les machines simples (poulies, leviers du 1er, 2^{e} et 3^{e} types etc.)

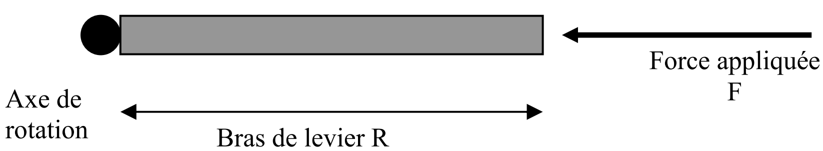
Le *moment de force (*ou *torque)* est la force angulaire engendrée par l'application d'une force sur un bras de levier. Le moment de force a donc une unité de Nm et est défini par :

$$\begin{array}{c} Torque = force \cdot bras\ de\ levier \\ \tau \quad = \quad F \quad \times \quad R \\ = \quad \mathrm{N} \quad \cdot \quad \mathrm{m} \end{array}$$

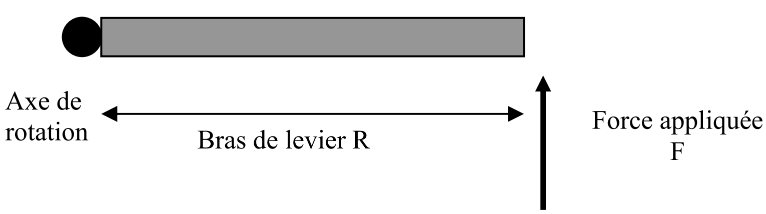
Certains livres ajoutent le symbole indiquant la perpendicularité, soit au bras de levier, soit à la force. La définition de moment de force requiert donc d'autres spécifications. Dans le cas du moment de force τ, *seule la composante de la force qui est perpendiculaire au bras de levier est importante*.

Exemple : Afin de mieux illustrer cette situation, prenons l'exemple d'une porte vue de haut.

Situation 1 : la force est appliquée parallèlement au bras de levier. La porte ne tournera pas autour de l'axe de rotation. Il n'y a pas de torque (moment de force).



Situation 2 : la force est appliquée perpendiculairement au bras de levier. La porte tournera autour de l'axe de rotation. Il y a une valeur fixe de moment de force



Ainsi, si nous voulons décrire le moment de force de manière appropriée :

$$\tau = F \cdot \sin\theta \cdot R$$

où $F\sin\theta$ est la composante de la force qui est perpendiculaire au bras de levier

R est le bras de levier (m)

θ est l'angle entre R et la force F

L'inertie a été définie, dans une section précédente, comme étant la tendance d'un objet de masse *m* à résister au mouvement. Dans le cas d'une rotation, la masse de l'objet et sa distance à l'axe de rotation sont tous deux des critères importants pour définir l'inertie. Le *moment d'inertie*, ou inertie rotationnelle, est donc la tendance d'un objet de masse *m* à résister à sa rotation autour d'un axe. Le moment d'inertie est une mesure de l'inertie rotationnelle. Le lien entre l'inertie, le moment d'inertie I et le moment de force τ est :

$$\begin{aligned} \text{torque} &= \text{moment d'inertie} \cdot \text{accélération angulaire} \\ \tau &= I \cdot \alpha \\ &= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Il est à noter que le moment d'inertie changera dépendamment de la géométrie de l'objet en rotation. Deux tableaus mentionnant les formes géométriques principales et leur moment d'inertie, selon la position de l'axe de rotation, sont présentés plus loin dans cette section.

Équilibre statique

En considérant la cinématique linéaire et la cinématique angulaire d'un objet quelconque, nous devons définir plus précisément le concept d'équilibre statique. On dit qu'un objet est en équilibre statique si :

1- la somme des forces agissant sur l'objet est zéro

$$\sum F_x \,, \sum F_y \text{ et} \sum F_z = 0$$

2- la somme des moments de force agissant sur l'objet est zéro

$$\sum \tau_x \,, \sum \tau_{\text{y}} \text{ et} \sum \tau_{\text{z}} = 0$$

Une somme nulle des forces n'est pas un critère suffisant pour garantir l'équilibre statique d'un objet. En fait, même si la somme des forces agissant sur l'objet est nulle, l'objet pourrait encore tourner (si l'objet tourne à vitesse constante, l'accélération est zéro et aucune force n'est présente).

Conservation du moment angulaire

Tout comme l'énergie et la quantité de mouvement, le moment angulaire est conservé, dans des situations idéales.

Principe de conservation du moment angulaire :

Le moment angulaire d'un objet est conservé si la somme des moments de force agissant sur l'objet est zéro.

Cette quantité est représentée par L et peut s'écrire :

$$L = I \cdot \omega$$
$$\begin{aligned} &où\ \ L \text{ est le moment angulaire} \mathit{(kg \cdot m^2/s)} \\ &\quad I \text{ est le moment d'inertie} \mathit{(kg \cdot m^2\,)} \\ &\quad \omega \text{ est l'accélération angulaire} \mathit{(rad/s)} \end{aligned}$$

2. Pré-quiz et auto-évaluation

1. Quelle est la différence entre une force et un moment de force?
   (La force occasionne le moment de force, i.e elle cause une rotation)
2. Le concept de moment de force obéit-il aux lois de Newton? Expliquez.
   (oui, ex : la deuxième loi de Newton en version rotationnelle)
3. La somme des forces agissant sur un objet en x, y et z est nulle. L'objet est-il nécessairement en équilibre statique? Donnez un exemple.
   (non, l'objet pourrait aussi tourner sur lui-même)
4. Faites un diagramme de force montre une porte et ses gonds (joints). Indiquez la force appliquée, la distance r et le moment de force résultant.
   (voir section de rappel pour exemple de la porte et ses gonds)
5. Lorsqu'une personne pousse une porte perpendiculairement à son axe de rotation, la porte de bouge pas. Expliquez cette situation en termes de moment de force et montrez pourquoi il ne peut y avoir de rotation de la porte (indice : utilisez les vecteurs et leur direction).
   (puisque l'équation de torque implique un sinθ, si la force est perpendiculaire, alors F et R sont parallèles, donc sin (0) = 0 , la torque est nulle)
6. Quelles sont les unités du moment de force? Existe-t-il d'autres unités équivalentes?
   (Nm, non le newton et le mètre sont deux unités fondamentales)
7. Dessinez un disque plat ayant un point de rotation à son centre. Une force F_1 est appliquée perpendiculairement au disque, à une distance de 3 cm de son centre. Une force F_2 est apppliquée parallèlement au disque, à son extrémité. La magnitude des deux forces est la même. Laquelle des deux forces occasionne un plus grand moment de force? Expliquez.
   (voir section de rappel, définition de torque)
8. Un moment de force de 62 Nm est présent lorsqu'une force F=250 N est appliquée à un objet en rotation. Le moment de force a été pris à l'origine et l'angle entre la force et le déplacement est de 12º. Quel est le déplacement *r* entre l'origine et l'objet en rotation? *(voir équation de torque et isoler R)*
9. Expliquez dans vos propres mots le principe de conservation du moment angulaire.
10. Quelle est la différence entre le moment angulaire et le moment d'inertie?
11. Pourquoi la forme physique de l'objet est-elle importante lorsqu'on calcule le moment d'inertie d'un objet? *(bonne question d'examen…discutez-en)*
12. Deux objets ont la même masse. Le premier objet a la forme d'une mince tige de longueur l et a un axe de rotation situé en son centre. Le second objet a la même forme, mais son axe de rotation est situé à une de ses extrémités. Lequel des deux objets a le plus grand moment d'inertie? Expliquez.

Auto-évaluation

Tel que mentionné au début du rappel, les notions qui seront vues dans cette section n'ont pas nécessairement été abordées en physique 20 ou 30. Prenez donc plus de temps qu'à l'habitude pour lire la section de rappel et/ou lisez le chapitre correspondant dans un livre de physique générale (Cutnell et Johnson, Benson, Giancolli etc.)

- Le concept de moment de force (torque)
- Le lien entre les équations de la cinématique linéaire et les équations de cinématique angulaire
- Le lien entre les lois de Newton sous forme linéaire et sous forme angulaire
- Le concept de moment d'inertie
- Le concept d'inertie
- Le concept de moment angulaire
- Pouvoir différencier moment angulaire, moment d'inertie, inertie et moment de force
- Les conditions nécessaires à l'équilibre statique
- Le principe de conservation du moment angulaire

3. Liste des variables de rotation

ANGULAIRES	**LINÉAIRES**	**Section**
déplacement angulaire $\Delta\theta$	déplacement Δx	vu
vitesse angulaire ω	vitesse v	vu
accélération angulaire α	accélération a	vu
moment de force τ	force F	4, 5
moment d'inertie $I = \sum mr^2$	masse m	7
moment de force $\Sigma\tau = I\alpha$	force $\Sigma F = ma$	7
travail $W = \tau\,\theta$	$W = F\,s$	8
énergie cinétique $K = ½\, I\omega^2$	$K = ½\, mv^2$	8
moment angulaire $L = I\omega$	quantité de mouvement $p = mv$	9
$\tau = dL/dt$	$F = dp/dt$	9
puissance $P = Fv$	$P = \tau\omega$	

Nous traiterons ici de la rotation *d'objets solides* autour d'*axes fixes*.

4. Moment de force

Définition : Soit une force $\boldsymbol{F}$ agissant en un certain point sur un objet solide étendu (par ex. tige, porte, sphère, automobile, etc.). Le *moment de force* (en anglais, *torque*) $\boldsymbol{\tau}$ associé à cette force, par rapport à un axe de rotation O, est le produit vectoriel du vecteur $\boldsymbol{r}$, qui va de O jusqu'au point où la force $\boldsymbol{F}$ est appliquée, par le vecteur force $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Le produit vectoriel est défini à la section 11 du Chapitre *Outils mathématiques pour la physique*.

La *direction* du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ est donné par la règle de la main droite : on aligne les doigts de la main droite dans la direction de $\boldsymbol{r}$ et on les enroule ensuite vers $\boldsymbol{F}$ (dans le sens de l'angle le plus petit entre $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{F}$), le pouce pointe alors dans la direction du vecteur résultant $\boldsymbol{\tau}$. Une façon plus simple de trouver la direction est d'enrouler les doigts dans le sens de la rotation causée par la force, si elle était la seule à agir, et le pouce indique le sens du moment de force.

La grandeur de $\boldsymbol{\tau}$ est donnée par

$$\tau = rF\sin\theta$$

où θ est l'angle (le plus petit parmi les deux possibilités) entre le vecteur $\boldsymbol{r}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$.

<u>Définition :</u> Le bras de levier (en anglais, *lever arm*) est

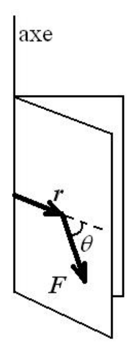
$$r_\perp = r\sin\theta$$

de sorte que $\tau = r_\perp F$. La quantité $r_\perp$ représente la composante du vecteur $\boldsymbol{r}$ qui est perpendiculaire à l'autre vecteur, $\boldsymbol{F}$.

Similairement, nous pouvons écrire $F_\perp = F\sin\theta$, qui est la composante du vecteur $\boldsymbol{F}$ perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{r}$. Ceci nous donne donc $\tau = rF_\perp$.

La question de choisir la forme $\tau = r_\perp F$ ou $\tau = rF_\perp$ dépend uniquement de ce qui est le plus facile à visualiser. Par exemple, si $\boldsymbol{F}$ est la force gravitationnelle, qui est *verticale*, alors il est plus commode de travailler avec $\tau = r_\perp F$, puisqu'elle se ramène à projeter $\boldsymbol{r}$ sur l'horizontale, perpendiculaire à $\boldsymbol{F}$.

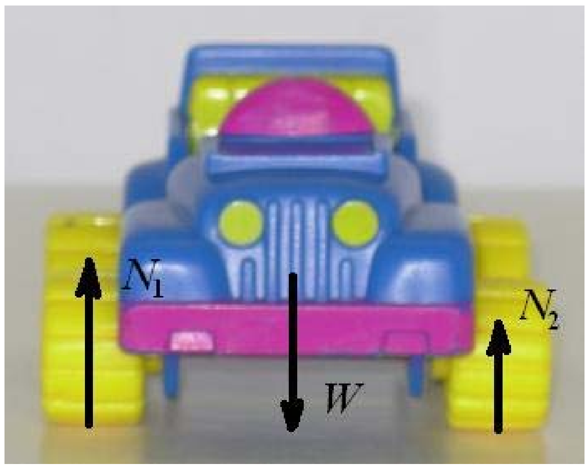
La figure ci-contre illustre une porte sur laquelle on exerce une force $\boldsymbol{F}$. Si on définit l'axe de rotation comme passant par les gonds, alors ceci implique que le vecteur $\boldsymbol{r}$ est tel qu'illustré :



Un peu plus loin, nous relierons le moment de force à l'effet d'une force sur la rotation d'un objet. Nous pouvons voir que la relation $\tau = rF\sin\theta$ est compatible avec le fait que, pour provoquer une plus grande rotation, nous pouvons exercer:

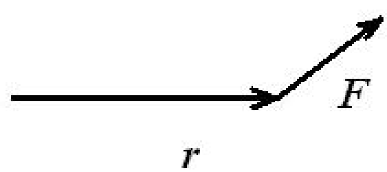
- une plus grande force F ;
- une force la plus perpendiculaire possible à $\boldsymbol{r}$ (d'où le terme sin);
- une force aussi loin que possible de l'axe de rotation (d'où le facteur r).

Exemple : Soit une automobile vue de l'arrière, ayant une distance d entre les roues. En plaçant l'axe de rotation au centre de gravité, calculez les moments de force associées à $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ et $\boldsymbol{W}$.

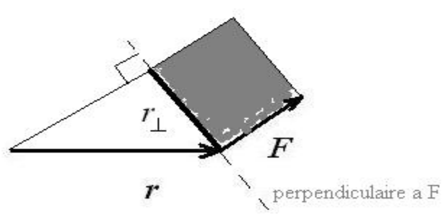


Réponses : $\tau_W = 0$, $\tau_{N1} =$ entre dans la page, $\tau_{N2} =$ sort de la page

Exemple : La force $\boldsymbol{F}$ est appliquée à une distance r tel qu'indiqué. Calculez le moment de force et illustrez les deux expressions $\tau = r_\perp F$ et $\tau = rF_\perp$.

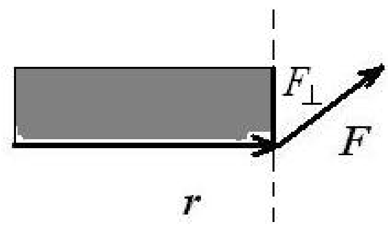


Pour commencer, utilisons la première expression, $\tau = r_\perp F$, qui signifie de multiplier F par la composante de $\boldsymbol{r}$ obtenue par projection sur la ligne perpendiculaire à $\boldsymbol{F}$. Ceci est illustré ci-dessous :



La grandeur de τ est donnée par l'aire du rectangle ombragé.

Utilisons maintenant l'expression $\tau = rF_{\perp}$, qui ramène à multiplier r par la composante de $\boldsymbol{F}$ perpendiculaire à $\boldsymbol{r}$. C'est facile dans le cas présent car $\boldsymbol{r}$ est horizontal, ce qui implique que sa perpendiculaire est verticale. Ceci est illustré ci-dessous, où la grandeur de τ est encore donnée par l'aire du rectangle ombragé ci-dessous :



5. Équilibre statique

Définition : Un corps est en *équilibre statique* si la force totale ainsi que le moment de force total sont tous deux égaux à zéro. Par conséquent, en deux dimensions, nous avons :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau = 0$$

(Remarquez qu'en trois dimensions, les six équations $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum \tau_x = 0$, $\sum \tau_y = 0$, et $\sum \tau_z = 0$ doivent être satisfaites. Mais nous ne considérerons pas ce type de problème ici.)

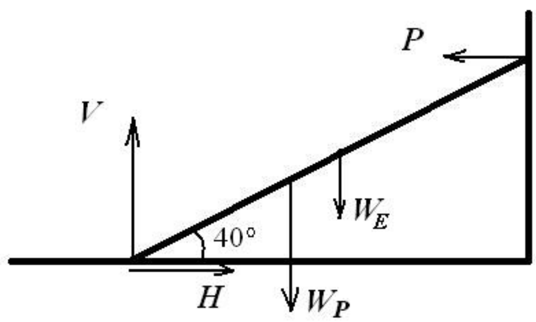
L'algorithme qui permet de résoudre ce type de problèmes contient les étapes suivantes :

- bien identifier l'objet en question ;
- tracer un diagramme des forces agissant sur cet objet ;
- choisir un système de coordonnées x et y qui soit convenable ;
- décomposer toutes les forces par rapport à ce système de coordonnées ;
- compléter les équations $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$;
- choisir un axe de rotation convenable et qui permet de simplifier les calculs;
- par rapport à cet axe de rotation, calculer le moment de force généré par chaque force ;
- compléter l'équation $\sum \tau = 0$;
- résoudre les trois équations obtenues ainsi et calculer les quantités demandées.

Exemple : Une échelle uniforme de 5 m et de poids 250 N repose sur un mur vertical lisse, faisant un angle de 40° au-dessus de l'horizontale. Le mot « lisse » (en anglais, *smooth*) signifie *sans frottement* et implique donc que la force exercée par le mur est *perpendiculaire* à ce dernier. Un homme de 850 N (poids total) se tient à 2 m du bas de l'échelle.

Calculez (a) la force perpendiculaire exercée par le mur, ansi que les composantes (b) horizontale et (c) verticale de la force exercée sur l'échelle par le sol.

Schéma des forces :



Solution : Choisissons l'axe *x* horizontal et l'axe *y* vertical, et l'origine (ou axe de rotation) au point de contact avec le sol. Nous trouvons

$$\sum F_x = H - P = 0$$

$$\sum F_y = V - W_E - W_P = 0$$

ce qui nous permet d'obtenir la réponse à la partie (c), $V = W_E + W_P = 1100$ N.

Considérons maintenant la somme des moments de force. Vu que le bras de levier est nul pour ***H*** et ***V***, nous trouvons $\tau_H = 0 = \tau_V$. Pour les trois forces restantes, nous avons

force	bras de levier	moment de force
W_E	$r_{\perp E} =$	$W_E r_{\perp E}$ entre dans la page
W_P	$r_{\perp P} =$	$W_P r_{\perp P}$ entre dans la page
P	$r_{\perp \text{mur}} =$	$P\, r_{\perp \text{mur}}$ sort de la page

Le symbole l représente la longueur totale de l'échelle. Nous obtenons

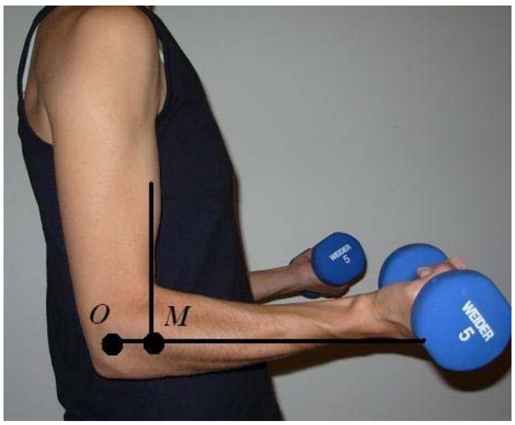
$$\sum \tau = W_E r_{\perp E} + W_P r_{\perp P} - P\, r_{\perp \text{mur}} = 0$$

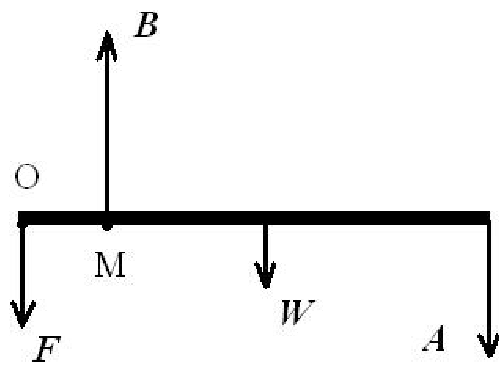
et ainsi,

$$P = \frac{W_E r_{\perp E} + W_P r_{\perp P}}{r_{\perp \text{mur}}} = \frac{(250)(2.5\cos 40°) + (850)(2\cos 40°)}{5\sin 40°} = 554 \text{ N}$$

ce qui est la réponse à la partie (a). Finalement la réponse à la partie (b) vient de la composante *x* des forces, qui donne $H = P = 554$ N.

Exemple : Une personne soutient un poids au repos. Le trait horizontal de la figure de gauche représente l'avant-bras, tandis que le trait vertical représente le muscle du biceps. Le point O est placé au coude, autour duquel l'avant-bras tourne, et le point M est le point d'attache du biceps à l'avant-bras. On suppose qu'il y a 4 cm entre O et M, que l'avant-bras mesure 33 cm, avec un poids (distribué uniformément) de 25 N. Si le poids soutenu dans la main est de 150 N, calculez (a) la force (supposée verticale) exercée par le biceps, et (b) la force exercée par le coude sur l'avant-bras.





Solution : Le schéma ci-dessus à droite illustre les forces agissant sur le système qui, dans ce cas-ci, est l'*avant-bras*. Les forces considérées sont :

A : poids de 150 N soutenu par la main
B : force par le biceps
W : poids de l'avant-bras, qui vaut 25 N, appliqué au centre de masse, c.-à-d. à 33/2 = 16.5 cm à gauche de O. Comme il y a 4 cm entre O et M, il reste donc 16.5 – 4.0 = 12.5 cm entre le point M et le centre de masse de l'avant-bras.
F : force exercé par le coude sur l'avant-bras. En général, elle pointe dans une direction quelconque, mais comme les autres forces sont verticales, alors elle doit être verticale aussi.

(a) Pour trouver **B**, nous plaçons l'origine au coude, d'où nous trouvons
$\sum \tau = B(\qquad) - W(\qquad) - A(\qquad) = 0$, d'où $B = 1340$ N

(b) Afin de trouver *F*, il faut clairement changer d'axe de rotation. Plaçons-le au point W, ce qui nous donne
$\sum \tau = -B(\qquad) + F(\qquad) - A(\qquad) = 0$, d'où $F = 1170$ N

6. Centre de masse et centre de gravité

Exemple : Rappelons une forme du calcul d'une moyenne qui sera utile par la suite. Considérons une classe de N étudiants qui reçoivent un examen corrigé sur 10 points. Supposons que

n_1 étudiants ont 1/10,
n_2 étudiants ont 2/10,
.
.
n_{10} étudiants ont 10/10.

Évidemment, $n_1 + n_2 + \cdots + n_{10} = N$.

Comme vous le savez, la moyenne est donnée par la somme des notes divisée par le nombre total d'étudiants. Il est commode d'écrire ce calcul sous la forme suivante :

$$\text{note moyenne} = \frac{n_1(1) + n_2(2) + \cdots + n_{10}(10)}{n_1 + \cdots + n_{10}}$$

On dit que la moyenne est pondérée par le nombre d'étudiants qui a eu une certaine note. Par exemple, si de nombreux étudiants ont 6/10, alors ceci contribuera à « attirer » la note moyenne vers 6/10.

Définition : Soit un ensemble de N particules de masses $m_1, m_2, \ldots, m_N$, disposées le long d'une droite, aux positions $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Le *centre de masse* est en quelque sorte la position moyenne du système pondérée par les masses :

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} = \frac{m_1 x_1 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + \cdots + m_N}$$

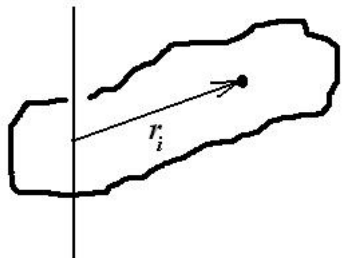
Définition : Soit un ensemble de N particules de poids $W_1, W_2, \ldots, W_N$, disposées le long d'une droite, aux positions $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Le *centre de gravité* est la position moyenne du système pondérée par les poids :

$$x_{\mathrm{CG}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} W_k x_k}{\sum_{k=1}^{N} W_k} = \frac{W_1 x_1 + \cdots + W_N x_N}{W_1 + \cdots + W_N}$$

Comme nous le verrons par la suite, le centre de masse est représentatif d'un objet de dimension finie. En première approximation, nous pouvons considérer un tel objet comme un point situé à son centre de masse, et soumis aux équations pour les particules, décrites jusqu'à présent.

7. Deuxième loi de Newton et moment d'inertie

La figure ci-dessous représente un objet rigide qui tourne autour de l'axe. Le vecteur $\boldsymbol{r}_i$ indique un des points qui compose le corps. Ce vecteur suit donc le mouvement de l'objet.



Le moment de force total est

$$\begin{aligned}
\tau_{\text{total}} &= \tau_1 + \cdots + \tau_N, \text{ où chaque } \tau_i \text{ est sur le i-ème point} \\
&= F_{1T} r_1 + \cdots + F_{NT} r_N, \text{ car } F_\perp = F_T \\
&= (m_1 a_{1T}) r_1 + \cdots + (m_N a_{NT}) r_N, \text{ parce que } F = ma \text{ pour chaque particule} \\
&= m_1 \alpha_1 r_1^2 + \cdots + m_N \alpha_N r_N^2, \text{ de } a_T = \alpha r \text{ en chaque point} \\
&= \sum_i m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha = I\alpha .
\end{aligned}$$

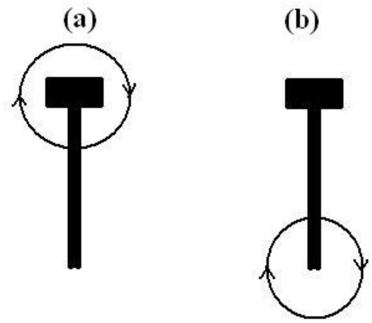
Définition : Le *moment d'inertie* I d'un objet solide est défini par la relation

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

où m_i est la masse de chaque particule qui constitue cet objet, et r_i est la distance de cette particule à l'axe de rotation. Plus précisément, r_i est la distance entre l'objet de masse m_i et le point de l'axe de rotation qui lui est le plus proche, de sorte le vecteur $\boldsymbol{r}_i$ est donc *perpendiculaire* à l'axe de rotation.

Remarques :

- En analogie avec la masse, le moment d'inertie mesure l'inertie de rotation, c.-à-d. la tendance d'un objet à s'opposer à un changement de vitesse angulaire.
- Contrairement à la masse, le moment d'inertie dépend de l'axe de rotation. Par exemple, il est plus facile de faire tourner un marteau autour de sa tête qu'autour de son manche, c.-à-d. $I_{(a)} < I_{(b)}$.



- L'axe de rotation n'a pas à passer par l'objet. Par exemple, dans sa rotation quotidienne, notre Terre tourne autour de son axe de symétrie, mais lors de sa rotation annuelle, l'axe passe par le Soleil.
- Dans le cas d'une seule particule, la formule se réduit à $I = mr^2$.
- Le *théorème des axes parallèles* stipule que le moment d'inertie *I* d'un objet (de masse *M*) par rapport à un axe de rotation parallèle et séparé d'une distance *h* d'une axe passant par le centre de masse de cet objet est donné par

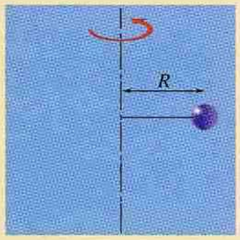
$$I = I_{\mathrm{CM}} + Mh^2$$

- La page suivante contient une liste de moment d'inertie utile. Le cylindre plein tournant autour de son centre, avec $I = \frac{1}{2}MR^2$, sera utilisé pour les poulies.

Tableau des moments d'inertie[1]

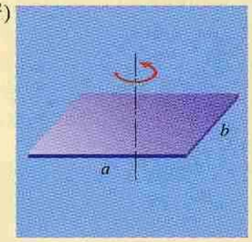
Objet ponctuel tournant sur un cercle de rayon R

$I = MR^2$



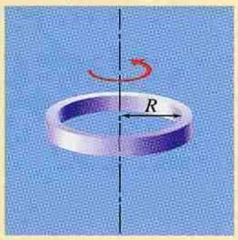
Plaque rectangulaire mince et homogène de côtés a et b tournant autour de son centre

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



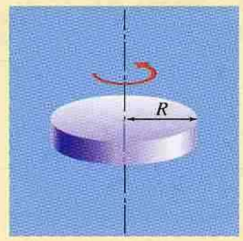
Anneau (ou cylindre creux) de rayon R tournant autour de son centre

$I = MR^2$



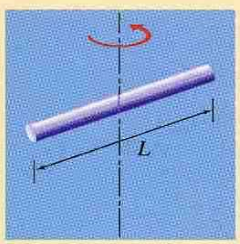
Disque (ou cylindre) plein de rayon R tournant autour de son centre

$I = \frac{1}{2}MR^2$



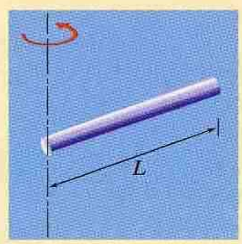
Tige de longueur L tournant autour de son centre

$I = \frac{1}{12}ML^2$



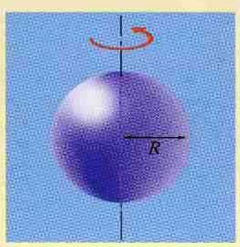
Tige de longueur L tournant autour d'une de ses extrémités

$I = \frac{1}{3}ML^2$



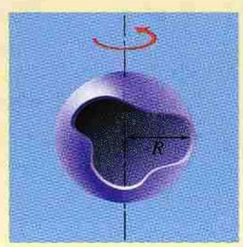
Sphère pleine de rayon R tournant autour de son centre

$I = \frac{2}{5}MR^2$



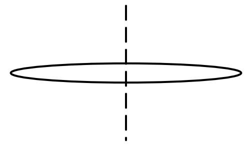
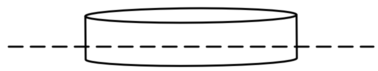
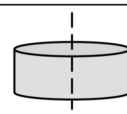
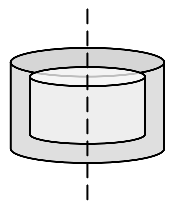
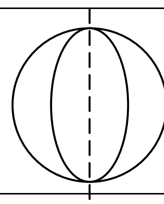
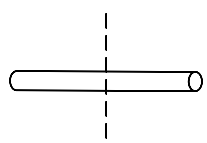
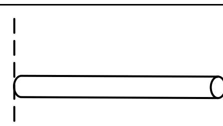
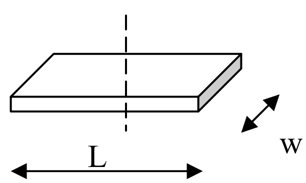
Sphère creuse (coquille) de rayon R tournant autour de son centre

$I = \frac{2}{3}MR^2$



[1] Tiré de: Benson .- *Physique Mécanique*- Éditions du Renouveau Pédagogique- Montréal, Qc., Canada.

Tableau des moments d'inertie d'objets divers[2]

Objet	**Emplacement de l'axe de rotation**	**Figure**	**Moment d'inertie I**
Mince Anneau de rayon R_0	Au centre		$I = MR_0^2$
Anneau de largeur w et de rayon R_0	Au centre du diamètre		$I = \frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
Cylindre plein de rayon R_0	Au centre du cylindre		$I = \frac{1}{2}MR_0^2$
Cylindre semi-plein Petit rayon R_1 et grand rayon R_2	Au centre		$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Sphère pleine de rayon R_0	Au centre		$I = \frac{2}{5}MR_0^2$
Tige mince de longueur L	Au centre, perpendiculairement à la tige		$I = \frac{1}{12}ML^2$
Tige mince de longueur L	À une des extrémités, perpendiculairement à la tige		$I = \frac{1}{3}ML^2$
Mince plaque en forme de Rectangle (longueur l et largeur w)	Au centre		$I = \frac{1}{12}M(l^2 + w^2)$

[2] Selon: Giancoli, D.C. – *PHYSICS for scientists and engineers with modern physics* – Prentice Hall, New Jersey, U.S.A., 2nd Edition, c1989, p. 225

Exemple : Une sphère pleine de masse M et de rayon R tourne autour d'un axe situé à une distance d de sa surface (comme, par exemple, la Terre en rotation autour du Soleil). Quel est son moment d'inertie ?

Solution : D'après le théorème des axes parallèles, $I = I_{\text{CM}} + Mh^2$, avec $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2$ et h, qui est la distance entre les deux axes de rotation, vaut $h = R + d$. Nous obtenons ainsi

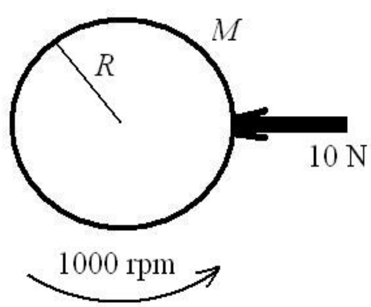
$$I = \frac{2}{5}MR^2 + M(R+d)^2 .$$

<u>Deuxième loi de Newton (version rotationnelle) :</u> Comme nous l'avons vu un peu plus haut, le moment de force net agissant sur un objet rigide cause une accélération angulaire,

$$\tau_{\text{total}} = \sum \tau = I\alpha$$

C'est ce qui explique pourquoi, à l'équilibre statique, dont la définition implique $\alpha = 0$, nous devons avoir $\sum \tau = 0$.

Exemple : La figure ci-dessous montre une poulie, de masse M = 750 g et de rayon R = 12 cm, qui tourne initialement à une fréquence de 1000 révolutions par minute (ou *rpm*). À $t = 0$ s, on pousse sur la poulie avec une force F = 10 N. Si le coefficient de friction cinétique entre la poulie et l'objet exerçant cette force vaut μ_C = 0.25, à quel temp t la poulie atteindra-t-elle une vitesse nulle ?



Solution : Comme il faut passer d'une certaine vitesse angulaire au repos, nous avons besoin de $\omega = \omega_0 + \alpha t$, où $\omega = 0$, t est ce que nous cherchons, $\alpha = \frac{\sum \tau}{I}$ (avec, pour la poulie, $I = \frac{1}{2}MR^2$) et $\omega_0 = 1000 \frac{\text{tours}}{\text{minutes}} \times \frac{1\,\text{minute}}{60\,\text{sec}} \times \frac{2\pi\ \text{radians}}{1\ \text{tour}} = 104.72\ \text{rad/sec}$.

Parmi les deux forces (***F*** et friction) qui agissent sur la poulie, une seule contribue un moment de force non-nul : la friction.

Nous avons $\tau_{fK} = Rf_K = R\mu_K F$, qui est opposée à la vitesse initiale, et causera donc une accélération angulaire négative, c.-à-d. un ralentissement. Cette accélération vaut donc

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = -\frac{R\mu_K F}{\frac{1}{2}MR^2} = -\frac{2\mu_K F}{MR}$$

de sorte que

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 MR}{2\mu_K F} = \frac{(104.72)(0.750)(0.12)}{2(0.25)(10)} = 1.88 \text{ sec.}$$

8. Énergie cinétique de rotation

Si nous revenons à la première figure de la section 7, et que nous calculions l'énergie cinétique totale de l'objet en rotation, nous obtenons alors

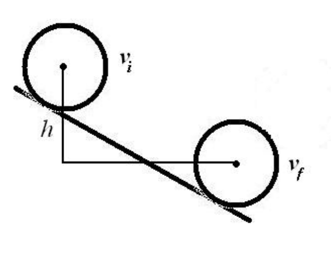
$$\begin{aligned} E_{K\,\text{totale}} &= E_{K1} + \cdots + E_{KN}, \text{ somme sur tous les points} \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_{1\mathrm{T}}^{\;2} + \cdots + \frac{1}{2}m_N v_{N\mathrm{T}}^{\;2}, \text{ car la vitesse est tangentielle} \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^{\;2} + \cdots + \frac{1}{2}m_N\omega^2 r_N^{\;2}, \text{ de } v_\mathrm{T} = \omega r \text{ en chaque point} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^{\;2}\right)\omega = \frac{1}{2}I\omega^2 . \end{aligned}$$

Définition : En plus de l'énergie cinétique habituelle, si un objet tourne sur lui-même, il nous faudra calculer l'*énergie cinétique de rotation* :

$$E_{K,\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

si l'objet de moment d'inertie *I* tourne autour d'un axe de rotation à une vitesse angulaire ω.

Exemple : Une boule de moment d'inertie *I* roule vers le bas d'un plan incliné à partir du repos.Quelle est sa vitesse après qu'elle ait roulé le long du plan incliné d'une distance telle que sa hauteur est réduite de *h* ?



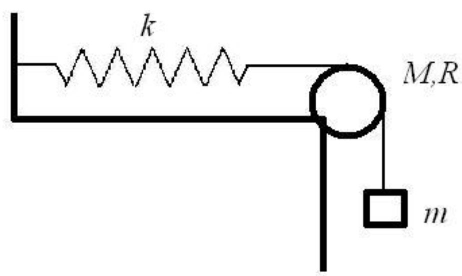
Solution : Comme il n'y a pas de travail effectué par une force de friction, nous avons $\Delta E = \Delta E_K + \Delta E_P = 0$. La seule contribution à l'énergie potentielle vient de la gravité : $\Delta E_P =$, où m est la masse de la boule. Comme la vitesse initiale est nulle, nous avons $\Delta E_K = E_{K\,\text{final}} =$. Mais les vitesses v_f et ω sont reliés par l'équation

$$\omega = \frac{v_f}{R} \qquad R : \text{rayon de la sphère}$$

La conservation de l'énergie mécanique totale nous donne donc

$\frac{1}{2}mv_f{}^2 + \qquad - mgh = 0$, d'où la réponse : $v_f = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + \dfrac{I}{R^2}}}$.

Exemple : La figure ci-dessous représente un bloc de masse m qui est attaché à un ressort de constante k par une corde qui passe à la circonférence d'une poulie de masse M et de rayon R. Si le système est initialement au repos et que le ressort a un étirement nul, quel est la vitesse du bloc lorsqu'il est tombé d'une distance d ?



Solution : Suite à la chute du bloc m, celui-ci perd de l'énergie potentielle. Par contre, l'énergie potentielle du ressort augmente, et le bloc et la poulie gagnent de l'énergie cinétique. Comme il n'y a pas de frottement, nous avons $W_{\text{NC}} = 0$. Aussi, la vitesse du bloc et la vitesse angulaire de la poulie sont reliées par $v = \omega R$ parce que la corde, qui se déplace à la vitesse du bloc, fait qu'un point de la circonférence bouge à la même vitesse. Nous trouvons

$$\Delta E = \Delta E_{K\,\text{m}} + \Delta E_{K\,\text{poulie}} + \Delta E_{P\,\text{grav}} + \Delta E_{P\,\text{ressort}} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{poulie}}(\quad)^2 - mgd + \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

Comme $I_{\text{poulie}} = \frac{1}{2}MR^2$, nous trouvons la réponse:

$$v = \sqrt{\frac{2mgd - kd^2}{m + \frac{1}{2}M}}$$

Remarquez que le rayon *R* n'apparaît dans cette expression. Aussi, la distance *d* ne peut pas être aussi grande que l'on veut, car le numérateur doit être non négatif.

<u>Définition :</u> Le *travail* effectué par un moment de force τ au cours d'un déplacement angulaire $\Delta\theta$ est donné par

$$W = \tau\,\Delta\theta\,.$$

Ce résultat suit directement de la définition habituelle : $W = F\,s = F\left(r\,\Delta\theta\right) = \overbrace{Fr}^{\tau}\,\Delta\theta\,.$

9. Moment angulaire

<u>Définition (objet ponctuel) :</u> Le *moment angulaire* (en anglais, *angular momentum*) ***L***, aussi appelé *moment cinétique*, d'une particule de quantité de mouvement ***p*** se trouvant à la position ***r*** par rapport à une origine choisie est défini par le produit vectoriel suivant :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

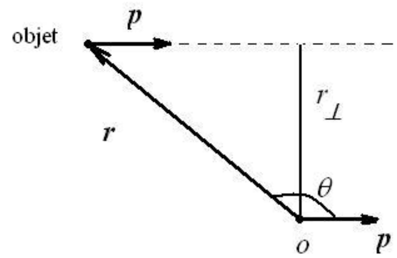
Remarquez la ressemblance avec le moment de force. Il joue un rôle analogue à la quantité de mouvement. Nous avons la relation $\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{dt}}$, qui implique que si le moment de force net est nul, alors le moment angulaire est conservé. Tout comme le moment de force, la grandeur de *L* est donnée par

$$L = r\,p\sin\theta$$

qui peut être écrite sous deux formes possibles :

$$L = r_\perp p \qquad \text{avec} \qquad r_\perp = r\sin\theta\text{, ou}$$
$$L = rp_\perp \qquad \text{avec} \qquad p_\perp = p\sin\theta\,.$$

La figure ci-dessous représente un objet (partie supérieure gauche) de quantité de mouvement ***p*** vers la droite. L'angle θ se trouve entre les vecteurs ***r*** et ***p***, mais seulement avec *les deux vecteurs ramenés à la même origine*. En utilisant la main droite, on voit que ***L*** *entre* dans la page. Remarquez aussi que $r_\perp$ reste le même si l'objet continue son mouvement en ligne droite, parallèlement à ***p***.



Une relation utile, obtenue de $L = r_\perp p$ et $p = mv$ est

$$L = mvr_\perp .$$

Définition (objet fini) : Le *moment angulaire* d'un objet de dimension finie de moment d'inertie *I* et de vitesse angulaire ω est donné par

$$L = I\omega$$

Cette relation est obtenue tout simplement en faisant la somme sur tous les points qui la composent :

$$L = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i \omega r_{\perp i}\, r_{\perp i} = \left(\sum_i m_i\, r_{\perp i}{}^2\right)\omega = I\omega$$

Conservation du moment angulaire : Si le moment de force externe total est nul, alors le moment angulaire est conservé, c.-à-d.

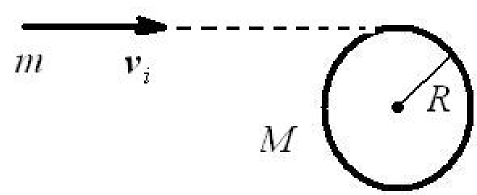
$$L_i = L_f$$

Exemple : Un disque de rayon R_1 et de masse m_1 tourne à vitesse ω_i dans le plan horizontal. À un certain instant, on laisse tomber sur le disque un second disque de masse m_2 et de rayon R_2, et on suppose que les deux disques restent collés l'un à l'autre. Quelle est la vitesse angulaire finale des deux disques? Prenez $I_{\text{disque}} = \dfrac{1}{2} mR^2$.

Solution : Nous commençons avec $L_i = L_f$, où $L_i = I_1\omega_i = \frac{1}{2}m_1R_1^{\,2}\omega_i$ et $L_f = I_2\omega_f = \left(\frac{1}{2}m_1R_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2R_2^{\,2}\right)\omega_f$. En isolant ω_f,

$$\omega_f = \frac{m_1R_1^{\,2}\omega_i}{m_1R_1^{\,2} + m_2R_2^{\,2}}$$

Exemple : La figure ci-dessous représente une vue aérienne d'une plate-forme circulaire de masse M et de rayon R, vers laquelle un coureur de masse m se dirige à vitesse v_i. Initialement, la plate-forme est au repos. (a) Si le coureur saute sur la circonférence de la plate-forme ($I_{\text{plate-forme}} = \frac{1}{2}MR^2$) et reste en ce poids, le système coureur-plate-forme se met à tourner à quelle vitesse angulaire? (b) Si le coureur marche ensuite vers le centre de la plate-forme, à quelle vitesse angulaire le système tourne-t-il?



Solution : La conservation de moment cinétique se lit $L_i = L_{(a)} = L_{(b)}$. Initialement, seulement le coureur est cause de moment cinétique, car la plate-forme est au repos. En plaçant l'origine au centre de la plate-forme, la définition de moment angulaire nous donne $L_i = mv_iR$ pour le coureur. (Nous pouvons aussi trouver ce résultat en utilisant $L_i = I\omega_i = \left(mR^2\right)\omega_i = m\left(\omega_iR\right)R = mv_iR$.)

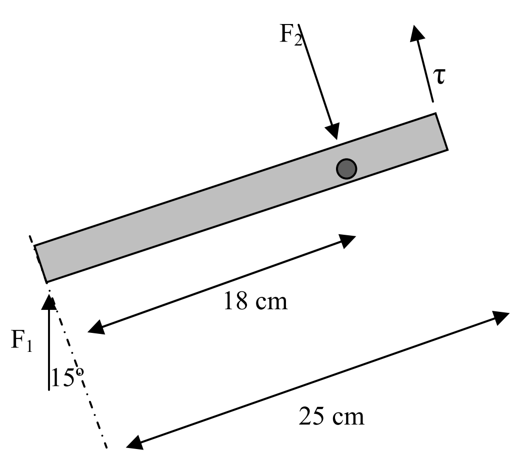
(a) Le moment d'inertie du système coureur-plate-forme est $I_{(a)} = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2$ de sorte que le moment angulaire total est $L_{(a)} = I_{(a)}\omega_{(a)}$. La relation $L_i = L_{(a)}$ nous donne

$$\omega_{(a)} = \frac{mv_i}{\left(m + \frac{M}{2}\right)R}$$

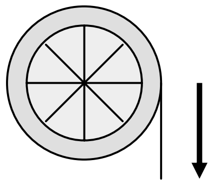
(b) Une fois le coureur au centre de la plate-forme, le moment d'inertie est alors $I_{(b)} = \frac{1}{2}MR^2$, c.-à-d. seule la plate-forme contribue, car le coureur a $r_\perp = 0$. La relation $L_i = L_{(b)}$ nous donne $\omega_{(b)} = \frac{2mv_i}{MR}$.

10. Test formatif

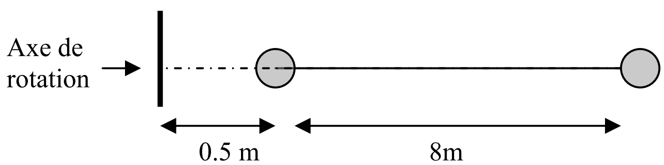
1. Une roue en métal a un rayon de 20 cm et tourne à une vitesse de 1500 rotation/minute.
   a) Calculez l'accélération angulaire
   b) La vitesse linéaire d'un point situé sur la circonférence de la roue
2. Considérez 2 vecteurs v_1 et v_2 où
   $v_1 = (a_1, b_1)$ et $v_2 = (a_2, b_2)$
   a) quelle sera la différence entre les résultats de v_1 x v_2 et $_{v2}$ x v_1?
   b) Énoncez les 3 conditions qui pourraient donner v_1 x $v_2 = 0$?
3. Énoncez le principe de conservation du moment angulaire.
4. Quelles sont les 6 équations nécessaires pour qu'un objet soit en équilibre?
5. En vous basant sur le principe de conservation du moment angulaire, expliquez pourquoi un hélicoptère ne peut avoir qu'un seul propulseur.
6. Une roue ayant un diamètre de 50 cm accélère uniformément de 100 rpm à 300 rpm en 3.0 secondes.
   a) Calculez l'accélération angulaire de la roue
   b) Calculez les composantes radiale et tangentielle de l'accélération linéaire pour un point situé à l'extrémité de la roue, et ce, 2 secondes après le commencement de l'accélération.
7. Lorsqu'une voiture effectue un virage, d'où vient le moment de force?
8. Quel est le moment de force maximal exercé par une personne de 60 kg qui se promène à bicyclette. Le rayon de la roue est de 18 cm.
9. Une ponçeuse électrique est utilisée pour définir la forme d'un cylindre de rayon 0.2m. Le cylindre, initialement au repos, atteint une vitesse de rotation de 1800 tours/min en 6.0 s. Si l'accélération angulaire est constante, calculez le moment de force fournit par la ponçeuse électrique.
10. Le moment de force requis pour dévisser un boulon est de 40 Nm. Un mécanicien se sert d'une clé anglaise (wrench) ayant une longueur de 30 cm pour dévisser le boulon. Quelle est la force F minimale qui doit être exercée sur la clé anglaise par le mécanicien pour pouvoir dévisser le boulon?
11. Le moteur d'une centrifugeuse fonctionnant à une vitesse de 10 000 rpm, est finalement immobilisé en utilisant un moment de force frictionnel de 0.20 Nm. La masse du moteur est de 4.3 kg et son rayon est de 0.070m. Combien de rotations seront nécessaires pour immobiliser le moteur? Combien de temps faudra-t-il?
12. Considérez la figure suivante et calculez le moment de force net. F_1 = 30 N et F_2 = 55 N.



13. Une force de 15.0 N est utilisée pour tirer une corde. La corde est attachée à une roue ayant un rayon de 33.0 cm et une masse de 4.00kg. La roue, initiallement au repos, accélère de manière uniforme pour atteindre une accélération angulaire de 30.0 rad/s en 3 secondes.
    a) calculez le moment d'inertie de la roue si cette dernière a aussi un moment de force frictionnel de 1.10 Nm.
    b) Le moment d'inertie serait-il plus grand ou plus petit si on négligeait le moment de force frictionnel?



14. Deux particules pesant respectivement 5.0 et 7.0 kg sont fixées aux extrémités d'une mince tige de 8 m de longueur.
    a) calculez le moment d'inertie si l'axe de rotation est situé à égale distance des 2 particules.
    b) Calculez le moment d'inertie si l'axe de rotation est situé 0.5m à l'extérieur du montage, du côté de la particule de 5 kg.



Réponses

1. a) 160 rad/s
   b)16 m/s
2. a) l'orientation du vecteur directeur est différente
   b) l'angle entre les 2 vecteurs est 0°, l'angle entre les vecteurs est de 180°, un des vecteurs a une magnitude de zéro.
3. Le moment angulaire total d'un corps en rotation reste le même si la torque nette agissant sur le corps est de zéro.
4. $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma\tau_x = 0$, $\Sigma\tau_y = 0$, $\Sigma\tau_z = 0$.
5. Si l'hélicoptère n'avait qu'un seul propulseur, la somme des moments de force ne serait pas zéro. L'hélicoptère se mettrait à tourner.
6. a) 700 rad/s^2
   b)150 m/s^2 et 1.7 m/s^2
7. Le moment de force vient de la force que le conducteur exerce en tournant le volant de la voiture. Comme il faut un plus grand moment de force pour faire tourner un camion de 18 roues, ce dernier a un volant de plus grand diamètre afin que la force à fournir par le conducteur ne soit pas trop grande.
8. 110 N·m
9. 53 N·m
10. 133.33 N

11. 9200 rotations, 110 secondes
12. 1.941 N·m (F2 agit parallèlement au moment de force, donc, il n'y a pas d'effet)
13. a) le moment d'inertie de la roue est de 0.385 kg·m^2
    b) le moment d'inertie serait plus grand
14. a) 48 kg·m^2
    b) 143 kg·m^2

Oscillateur harmonique simple

1. Rappel de Physique 20 et 30

Loi de Hooke

Lorsqu'un objet de masse *m* est attaché à un ressort étiré d'une distance *x* de sa position d'équilibre :

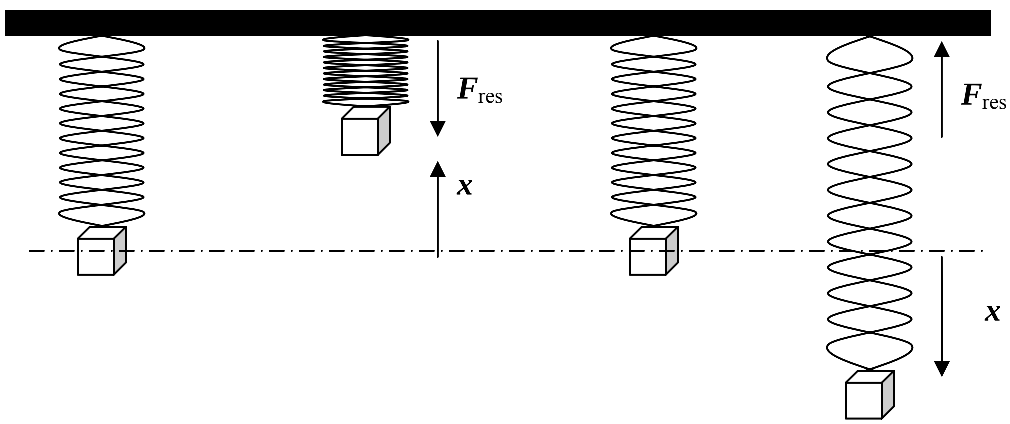
$$F_{\text{res}} = -kx$$

où k est la constante d'élasticité du ressort (N/m)

x est l'étirement du ressort (m)

F_{res} est la force du ressort (N)

où le signe négatif indique que la force du ressort sur la masse est exercée dans la direction opposée au mouvement.



ressort au repos — ressort contracté — ressort au repos — ressort étiré

Fréquence, période et fréquence angulaire

La *fréquence angulaire*, ou *pulsation*, ω est proportionnelle à la vitesse d'oscillation de la particule attachée au ressort. Plus précisément, la fréquence angulaire est l'angle couvert par la masse oscillante à chaque seconde, et est définie par l'équation ci-dessous et se mesure en radians par seconde.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

où ω est la fréquence angulaire (rad/s)

m est la masse attachée au ressort (kg)

k est la constante d'élasticité du ressort (N/m)

La *fréquence f* , à ne pas confondre avec la fréquence angulaire, correspond à l'inverse de la période :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

où T est la période (s)
(temps requis pour une oscillation)

On peut ainsi obtenir une expression pour la période d'oscillation.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Énergie cinétique

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

où m est la masse (kg)
v est la vitesse (m/s^2)

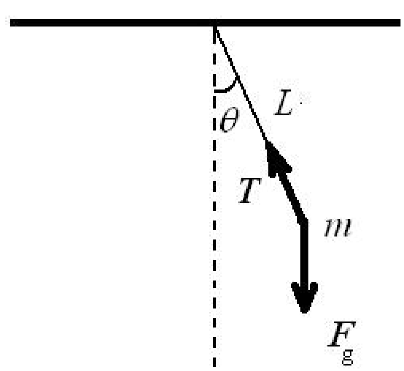
Énergie potentielle d'un ressort

$$E_{p/r} = \frac{1}{2}kx^2$$

où k est la constante d'élasticité du ressort (N/m)
x est l'étirement du ressort (m)

Pendule simple

Un pendule simple est un bon exemple de mouvement harmonique simple. Un tel système est composé d'une masse attachée à une corde. La période du pendule ne dépend que de la valeur de l'accélération gravitationnelle et de la longueur de la corde.



Dans un pendule simple, la force qui ramène la masse à sa position d'équilibre est appelée la *force de rappel* $\mathbf{F}_t$

$$F_t = -mg\sin\theta$$

où m est la masse du pendule (kg)

g est l'accélération gravitationnelle (m/s^2)

θ est l'angle couvert (radians)

Le déplacement s du pendule peut être trouvé par trigonométrie

$$s = L\theta$$

où L est la longueur du pendule (m)

θ est l'angle couvert (radians)

La fréquence angulaire d'un pendule simple est

$$\omega = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

où g est l'accélération gravitationnelle (m/s^2)

L est la longueur du pendule (m)

La période d'un pendule est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

Prenez quelques minutes pour résoudre les problèmes suivants. Ils portent sur les concepts de la section A.1. Une difficulté à résoudre les problèmes suivants indique que vous devez réviser les concepts de Physique 20 et 30 encore une fois. On s'attend à ce que vous soyez capable de résoudre ces problèmes rapidement et sans difficulté.

1. Un géologue est dans un champ avec un pendule simple de longueur 0.171 m. Il compte 72 oscillations par minute. Quelle est la valeur de la gravité à cet endroit? (9.73 m/s^2)
2. Pourquoi la loi de Hooke contient-elle un signe négatif? Que signifie-t-il?
3. Un système masse-ressort contient une masse de 3 kg et un ressort ayant un k = 50 N/m. Quelle est l'énergie potentielle du ressort? (450 joules)

4. Un alpiniste mesure g = 9.70 m/s2 au sommet du mont Everest, et son pendule a une corde d'une longueur de 52 cm. Quelle est la période du pendule à cet endroit?
(1.45 s)
5. Un système masse-ressort oscille sans perte d'énergie. La masse suspendue pèse 7 kg et la fréquence angulaire mesurée est de 3 rad/s. Quelle est le k du ressort?
(56 N/m)

<u>Auto-évaluation</u>

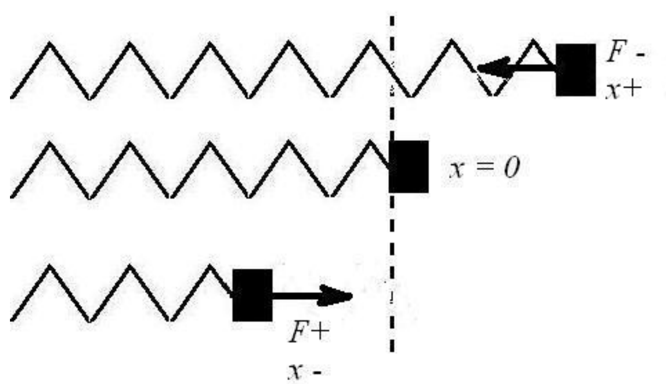
Assurez-vous de bien maîtriser les concepts suivants :

- isoler la variable *L* dans l'équation qui décrit la période d'un pendule simple
- transposer les centimètres et les kilomètres en mètres sans faire d'erreurs
- expliquer d'où vient le signe négatif dans la loi de Hooke
- comprendre les unités associées à l'énergie, la force, l'accélération
- gravitationnelle, le coefficient d'élasticité d'un ressort, le temps et la fréquence angulaire.
- faire la différence entre fréquence et fréquence angulaire

Il est conseillé de relire vos notes de cours de Physique 20 et 30 ou de lire la section appropriée dans le manuel de cours.

3. Système masse-ressort

Lorsqu'une masse m est attachée à un ressort de constante k, la force F_{ress} exercée par le ressort sur la masse, est toujours opposée au déplacement, representé ici par x. De plus, F_{ress} ne dépend pas de la masse.



Lorsque x est dans une domaine approprié de valeurs, la force F_{ress} prend la valeur

$$F_{ress} = -kx$$

En utilisant cette équation avec $F = ma$, où $a = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$, nous trouvons qu'une solution est donnée par

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

où

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

<u>Définition :</u> La constante A s'appelle l'*amplitude* d'oscillation. Les valeurs minimale et maximale de x sont respectivement $-A$ et $+A$. On peut aussi la voir comme l'étirement du ressort au temps $t = 0$ s.

<u>Définition :</u> On appelle ω la *fréquence angulaire* de la masse. Elle est exprimée en rad/s.

<u>Définition :</u> La *fréquence f* d'oscillation de la masse est donnée par

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

et elle est exprimée en Hertz (Hz), telle que 1 Hz = 1 s^{-1}. La fréquence représente le nombre d'oscillations par seconde.

<u>Définition :</u> La *période T* d'oscillation est la réciproque de la fréquence :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k}$$

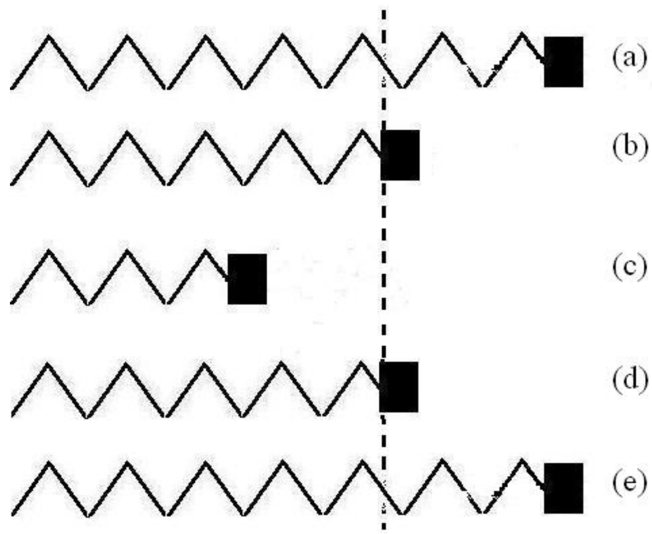
L'unité est la second (s). La période représente le temps pour que la masse effectue un cycle complet.

En dérivant par rapport à *t*, nous trouvons $v = \dfrac{dx}{dt}$:

$$v(t) = -\overbrace{\omega A}^{v\max}\sin(\omega t)$$

En dérivant une seconde fois :

$$a(t) = -\overbrace{\omega^2 A}^{a\,\max}\cos(\omega t) = -\omega^2 \; x(t)$$



Quelques positions extrêmes sont représentées ci-dessus :

	x	v	a
(a)	A	0	$-a_{\max}= -\omega^2 A$
(b)	0	$-v_{\max} = -\omega A$	0
(c)	$-A$	0	$a_{\max}= \omega^2 A$
(d)	0	$v_{\max}=\omega A$	0
(e)	A	0	$-a_{\max}= -\omega^2 A$

<u>Rappel :</u> Le but de ce rappel est qu'il faut faire attention quand on utilise les fonctions trigonométriques réciproques. Par exemple, pour un y donné, la relation $x = \arccos y$ ne donne pas toutes les valeurs possibles de x qui satisfont $y = \cos x$. C'est parce que le domaine de la fonction $\arccos$ est *restreint*, de façon à ce qu'on puisse parler de « fonction » dans ce domaine. Si $y = 1$, alors la relation $x = \arccos y$ ne donne que $x = \arccos(1) = 0$, alors qu'en réalité, $\cos x = 1$ pour $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ En termes géométriques, c'est qu'il y a plusieurs (en fait, une infinité) angles qui décrivent un point donné sur le cercle.

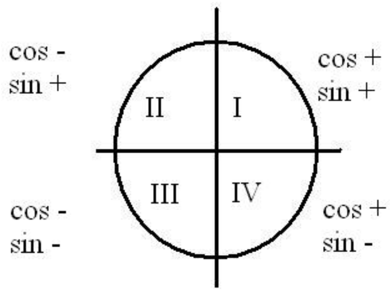
Dans les problèmes où nous vous demandons que trouver le temps t, il faut utiliser la fonction trigonométrique réciproque appropriée pour trouver un premier angle, après quoi, il est recommandé d'utiliser un cercle pour identifier toutes les autres possibilités. Ceci est illustré à l'exemple ci-dessous.

Exemple : Une masse de 75 g est attachée à un ressort de constante 20 N/m. Si on la lâche de la position $x = 15$ cm à $t = 0$ s, à quels temps la masse se trouvera-t-elle à $x = 10$ cm en se déplaçant dans la direction positive?

Solution : Comme nous cherchons *t* tel que $x(t) =$ $= +10$ cm et $v(t) = \omega A\sin(\omega t) < 0$, nous devrons restreindre notre quête aux valeurs de ωt telles que

$$\cos(\omega t) > 0 \text{ et } \sin(\omega t) < 0$$

Par conséquent, l'angle ωt est dans le quadrant.



La fréquence angulaire de la masse est $\omega = \sqrt{k/m} = 16.3$ rad/s. D'autre part, la relation $x(t) = 15\cos(\omega t) = +10$ indique que les valeurs de t doivent satisfaire

$$\cos(\omega t) = +\frac{10}{15} = +\frac{2}{3}$$

En utilisant la réciproque, nous trouvons $\omega t = 0.8410686706$ (nous gardons plusieurs décimales en cours de calcul…). Cependant, cette valeur n'est même pas bonne, car elle nous donne un sinus positif, alors que nous désirons un sinus négatif. Il faut donc commencer avec $\omega t = -0.8410686706$, auquel il faut ajouter $2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) pour avoir tous les temps positifs possibles. Ainsi, nous gardons a priori

$$\omega t = -0.8410686706 + 2\pi n$$

Remarques que les valeurs $n \leq 0$ donnent des temps négatifs. Il faut donc garder $n = 1, 2, 3, \ldots$

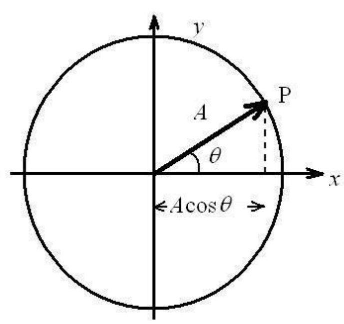
La réponse complète est donc

$$t = \frac{-0.8410686706 + 2\pi n}{16.3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$= 0.334 \text{ s}, 0.719 \text{ s}, 1.10 \text{ s}, 1.49 \text{ s}, \ldots$$

4. Mouvement circulaire et oscillateur harmonique simple

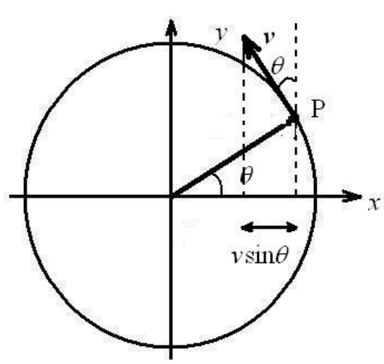
Une alternative à la preuve par dérivation de la section précédente pour les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération est basée sur la correspondance entre (1) le mouvement harmonique simple, et (2) la projection d'un mouvement circulaire le long d'un axe.

Considérons un point P qui tource autour d'un cercle de rayon A à une fréquence ω. Si l'on suppose qu'à $t = 0$, ce point se trouvait à l'angle $\theta = 0$, alors au temps t, la position de P est $\theta = \omega t$. La figure ci-dessous montre que la projection de la position de P sur l'axe x, qui est égale à $A\cos\theta = A\cos\omega t$, est la formule pour la position de la masse attachée à un ressort.



Ce cercle est parfois appelé *cercle de référence* (en anglais, *reference circle*). Il est utile car il permet de trouver les expressions pour la vitesse et l'accélération en projetant sur l'axe x les vecteurs vitesse et accélération.

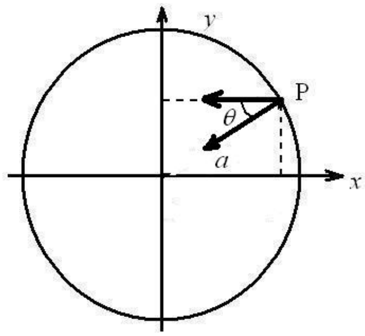
Vitesse : La vitesse **v** est la vitesse tangentielle, de grandeur $v_T = \omega A$ et orientée dans la direction illustrée ci-contre au moment où le point P se trouve à l'angle $\theta_T = \omega t$.



Comme le vecteur pointe vers les x négatifs, nous voyons que la projection de la vitesse sur l'axe x est

$$-v\sin\theta = -\omega A \sin \omega t$$

Accélération : Il s'agit ici de l'accélération centripète $\boldsymbol{a}_c$, de grandeur $a_T = \dfrac{v^2}{A} = \omega^2 A$ et orientée vers le centre du cercle, tel qu'illustré ci-dessous au moment où le point P se trouve à l'angle $\theta_T = \omega t$



Comme le vecteur pointe encore vers les x négatifs, la projection de $\boldsymbol{a}$ sur l'axe x est

$$-a\cos\theta = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$$

5. Énergie dans un système masse-ressort

À la section 5 du chapitre *Travail et énergie*, nous avons prouvé que l'énergie potentielle associée à une masse attachée à un ressort (constante k) étiré d'une distance x hors de sa position d'équilibre est donnée par :

$$E_{\text{pot,ress}} = \frac{1}{2}kx^2$$

Ainsi, en tout temps, l'énergie mécanique totale du système est donnée par

$$E_{\text{tot}} = E_K + E_{\text{pot,ress}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Comme nous avons $E_{\text{pot,ress}} =$ lorsque $E_K = 0$, et $E_K = \frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ lorsque $E_{\text{pot,ress}} = 0$, l'énergie mécanique totale vaut donc

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

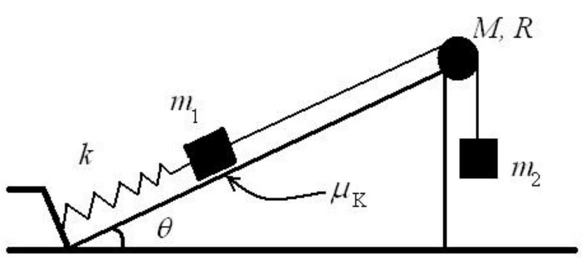
<u>Exemple :</u> En termes de l'amplitude A, à quelles positions x trouve-t-on une énergie cinétique égale à la moitié de l'énergie potentielle?

Solution : Comme $E_K = E_{\text{pot}}/2$, nous trouvons

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2 = \overbrace{\frac{1}{2}E_{\text{pot}}}^{E_K} + E_{\text{pot}} = \frac{3}{2}E_{\text{pot}} =$$

d'où $x = \pm \qquad A$.

<u>Exemple :</u> Le système ci-dessous consiste en deux masses, m_1 = 1.8 kg et m_2 = 3.0 kg, reliée par une corde qui passe par une poulie de masse M = 400 g et de rayon 12 cm. La masse m_1 est sur un plan incliné de 20º, avec une coefficient de friction cinétique égale à 0.15, et est attachée à un ressort de constante k = 15 N/m. (a) Quelle est l'élongation maximale du ressort si on laisse tomber m_2 du repos, avec le ressort initialement non étiré? (b) Quelle est la vitesse de m_2 au moment où le ressort est étiré de 1.5 m?



Solution : Il s'agit d'un problème de conservation de l'énergie mécanique totale.

$$\Delta E_{\text{totale}} = W_{\text{NC}}$$

avec $E_{\text{totale}} = E_K + E_{\text{grav}} + E_{\text{ress}}$. En général, nous aurons

- $E_K =$ ______ + ______ + ______
- $E_{\text{grav}} = E_{\text{grav},m1} + E_{\text{grav},m2}$
- $E_{\text{ress}} = \frac{1}{2}kx^2$, où x est la chute de m_2 et, donc, l'étirement du ressort
- $W_{\text{NC}} = -\mu_c F_N = -$

(a) $\Delta = f - i$ où i représente le point de départ, et f l'étirement maximal, lorsque tous les corps sont momentanément arrêtés. Par conséquent, nous avons $\Delta E_K = 0$. Nous trouvons aussi $\Delta E_{\text{grav}} = \Delta E_{\text{grav,m1}} + \Delta E_{\text{grav,m2}} = m_1 gx\sin\theta - m_2 gx$. Compte tenu de toutes ces informations, l'équation $\Delta E_{\text{totale}} = W_{\text{NC}}$ nous donne

$$m_1 gx\sin\theta - m_2 gx + \frac{1}{2}kx^2 = -$$

d'où

$$x = \frac{2g}{k}\left[m_2 - m_1(\sin\theta + \mu_c \cos\theta)\right] = 2.78 \text{ m}$$

(b) Ici, dans $\Delta = f - i$, le configuration i est encore le point de départ, mais f est le point où m_2 est tombé de 1.5 m, le système étant encore en mouvement. Le changement d'énergie cinétique est égal à

$$E_{K,f} = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

avec $I = \frac{1}{2}MR^2$ pour la poulie, et $\omega = \frac{v}{R}$. Par conséquent, nous avons

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}(\qquad\qquad\qquad\qquad)v^2$$

Vu que ΔE_{grav}, ΔE_{ress} et W_{NC} ont des expressions semblables à la partie (a), sauf qu'ici, nous prenons $x = 1.5$ m, nous obtenons

$$\Delta E_K + \Delta E_{\text{grav}} + \Delta E_{\text{ress}} = W_{\text{NC}}$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)v^2 + (\qquad\qquad\qquad\qquad)gx + \frac{1}{2}kx^2 = -\mu_c m_1 gx\cos\theta$$

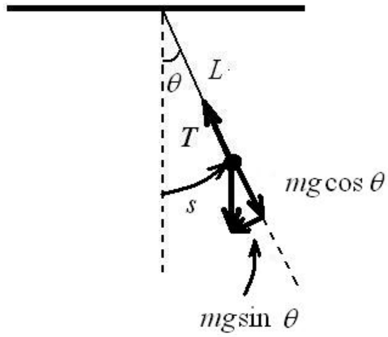
d'où la réponse :

$$v = \sqrt{\frac{2\left[m_2 - m_1(\sin\theta + \mu_c \cos\theta)\right]gx - kx^2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}} = 2.40 \text{ m/s}$$

6. Pendules

Pendule simple

Revenons à la figure du pendule simple de la section 1 de ce chapitre et décomposons la force de gravité en composantes parallèle et perpendiculaire à la corde.



La force résultante provoquant une accélération est perpendiculaire à la corde, et elle vaut

$$F = -mg\sin\theta \cong -mg\theta$$

dans l'approximation des petits angles ($\sin\theta \cong \theta$, avec θ en *radians*). L'accélération correspond à la dérivée seconde de *s*, de sorte que la deuxième loi de Newton devient

$$-mg\theta = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

ce qui donne une équation d'oscillateur harmonique simple :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta = -g\frac{s}{L} = -\omega^2 s$$

Nous avons utilisé $s = L\theta$, et introduit la fréquence angulaire:

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

Question : Pourquoi y a-t-il un signe moins dans la formule pour *F*?

Exemple : Quelle est la période d'oscillation d'un pendule constitué d'une masse de 50 grammes attaché à une corde de 60 cm, sur la Lune, dont la constante de gravitation est environ $\frac{g}{6}$?

Solution : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L/g_{\text{Lune}}} = 2\pi\sqrt{0.60/(9.8/6)} = 3.81\ \text{s}$

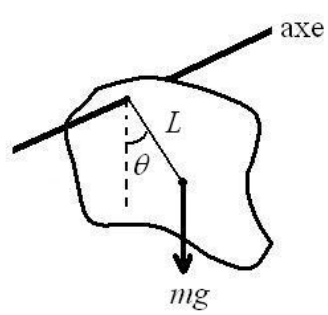
Autre preuve : L'expression $\omega = \sqrt{g/L}$ peut aussi être obtenue en utilisant la forme angulaire de la deuxième loi de Newton : $\tau = I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$. Le moment de force vaut $\tau = -mgL\sin\theta \cong -mgL\theta$, tandis que le moment d'inertie de la seule particule est $I = mL^2$. L'équation de Newton donne donc

$$-mgL\theta = mL^2\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

qui a la forme $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$, avec $\omega^2 = g/L$, ce qui est compatible avec notre résultat.

Pendule composé (en anglais, *physical pendulum*)

Il s'agit d'une généralisation du pendule simple qui consiste en un corps rigide pivotant librement autour d'un axe qui passe à une distance L de son centre de masse. Supposons que le moment d'inertie du corps rigide par rapport à cet axe soit I.



La deuxième loi de Newton $\tau = I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$, avec $\tau = -mgL\sin\theta \cong -mgL\theta$, donne

$$-mgL\theta = I\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

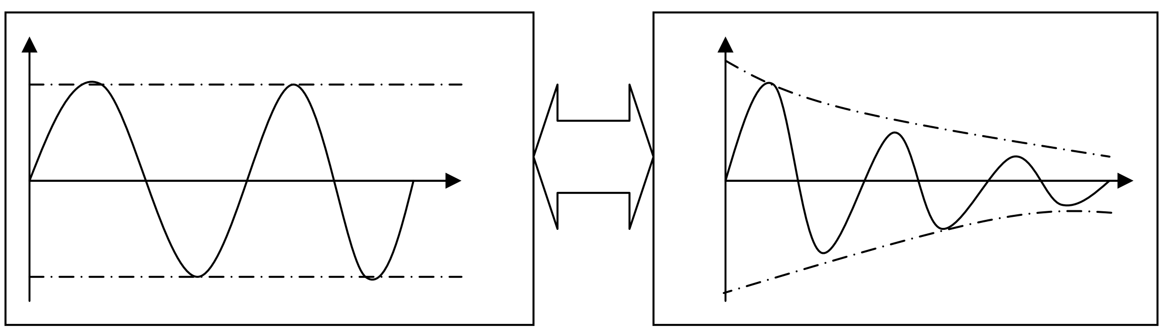
qui a la forme $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$, avec $\omega^2 = \frac{mgL}{I}$, de sorte que

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

7. Oscillations amorties

Les oscillations décrites dans les sections précédentes prennent place dans un système idéal, c'est-à-dire sans perte d'énergie. En réalité, cependant, un système masse-ressort ralentit peu à peu, car la friction occasionne une perte d'énergie. On dit que l'oscillateur est *amorti* (en anglais, *damped*). Lors d'une oscillation amortie, l'amplitude diminue progressivement jusqu'à l'arrêt complet du mouvement.

Oscillation idéale versus oscillation amortie



Oscillation idéale avec amplitude constante

Oscillation amortie avec amplitude qui diminue.

L'impact de l'amortissement de l'oscillation dépend habituellement du montant de friction dans le système et du fluide dans lequel le système oscille. L'amortissement peut être qualifié de *sous-critique*, *critique* ou *sur-critique*.

- *amortissement sous-critique* : le fluide entourant le système n'est pas très visqueux et l'oscillation s'estompe peu à peu.
- amortissement critique : le fluide entourant le système est plus visqueux et l'amortissement cesse presque instantanément pour retourner à la position d'équilibre.
- *amortissement sur-critique* : le fluide entourant le système est encore visqueux, mais l'amortissement ne cesse pas instantanément. Un certain temps est nécessaire pour le retour à la position d'équilibre.

La présence de friction dans le système modifie l'équation du mouvement de la particule de façon à tenir compte de la viscosité du fluide environnant. En première approximation la force de friction *f* dans un fluide peut être considérée proportionnelle à la vitesse *v* :

$$f = -\gamma v$$

où γ est appelée *constante d'amortissement* (en kg/s). La deuxième loi de Newton devient donc

$$F_{\text{tot}} = -kx - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

ou encore

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

Cette équation différentielle admet pour solution $x(t) = A\cos(\omega' t + \varphi)$, où la nouvelle fréquence angulaire du système est

$$\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \qquad \text{(rad/s)}$$

est φ est une constante de phase.

8. Test formatif

1. Expliquez le concept d'approximation des petits angles et montrez un exemple pour lequel il est utile dans cette section
2. Un bloc est attaché à un ressort. Un élève tire la masse et étire le ressort à une amplitude *A* et le relâche. Quelle est la distance parcourue par le ressort en un cycle complet?
3. Dans le cas de l'oscillation harmonique simple, lesquels des vecteurs suivants ne peuvent pas pointer dans la même direction?
   a) position et vitesse
   b) vitesse et accélération
   c) position et accélération
4. Considérez la situation suivante :
   Une masse m est attachée à un ressort horizontal. On assume une surface sans Friction. On étire le ressort à une position *A* et on le relâche. Le système se comporte comme un oscillateur harmonique simple ayant une période *T*.

La même expérience est répétée avec un ressort de masse 4m. Quelle est la nouvelle période T du système?

5. Un garçon de 45 kg saute sur une trampoline de 100 kg. La trampoline contient un ressort ayant une constante d'élasticité k = 3 650 N/m. Trouvez
   a) la fréquence angulaire du garçon
   b) la fréquence du garçon
   c) la période du garçon
6. Un pendule simple est suspendu au plafond d'un ascenseur qui bouge à vitesse constante. La période du pendule augmente-t-elle, diminue-t-elle ou reste-t-elle la même?
7. Un étudiant utilise un pendule simple de masse m et longueur l comme horloge dans sa chambre. Laquelle des réponses suivantes est la plus appropriée si l'étudiant allonge la longueur de la corde à 4l.
   a) l'étudiant dormira plus longtemps parce que le temps passera plus lentement
   b) l'étudiant dormira moins longtemps parce que le temps passera plus rapidement
   c) l'étudiant aura le même nombre d'heures de sommeil que la nuit précédente
8. Quels sont les trois conditions nécessaires à l'existence d'une onde?
9. Une onde se déplace sur une corde à une vitesse v, une fréquence f et une longueur d'onde λ. Qu'arrivera-t-il à la vitesse de l'onde si sa longueur d'onde est diminuée de moitié?
10. Une onde se déplace sur une corde ayant une densité μ. Qu'arrivera-t-il à la vitesse si on quadruple la densité de la corde?

Réponses :

1. En utilisant le concept d'approximation des petits angles, on assume que l'angle est tellement petit que sin $\theta \approx \theta$. On s'en sert pour simplifier le mouvement pendulaire
2. $4A$
3. (c)
4. $2T$
5. a) 8.54 rad/s
   b) 1.36 Hz
   c) 0.735 s
6. Puisque $F = ma$ et qu'il n'y a pas d'accélération (vitesse constante), il n'y a pas de force supplémentaire agissant sur le pendule. Donc, la période restera la même.
7. En allongeant la corde à 4l, la période deviendra deux fois plus grande. Donc, le temps s'écoulera plus lentement et l'étudiant dormira plus longtemps.
8. Source de perturbation, milieu et interaction
9. Sa vitesse diminue aussi de moitié
10. La vitesse diminuera de moitié

Ondes et son

1. Rappel de Physique 20/30

Qu'est-ce qu'une onde?

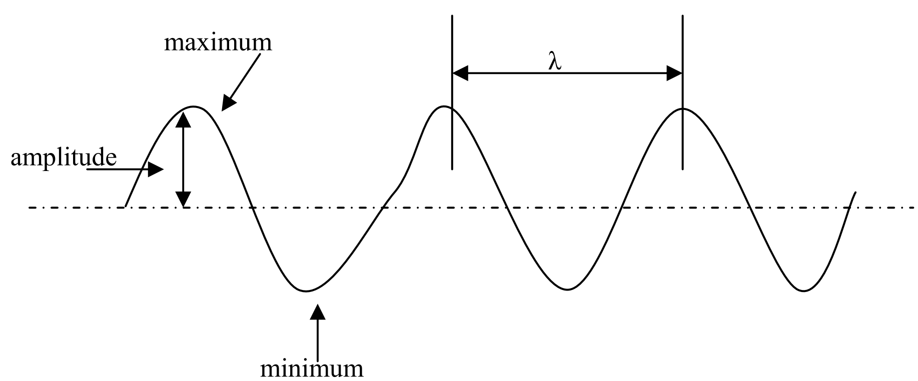
Les ondes sont un moyen de transporter de l'énergie. Par définition, l'énergie peut être considérée comme :

a) des petites particules se déplaçant d'un endroit à un autre en transportant de petites quantités d'énergie, ou

b) une onde (un train) transportant l'énergie en perturbant le milieu dans lequel elle se déplace.

Quelques définitions utiles

Source : objet, substance ou fluide qui vibre pour créer des ondes
Milieu : (en anglais *medium*) environnement dans lequel l'onde se déplace
Propagation : la direction de l'onde dans le milieu
Fréquence : le nombre de cycles que l'onde accomplit en une seconde
L'unité de la fréquence est le Hertz (Hz), ce qui est équivalent à 1/s



Types d'ondes

Il existe plusieurs types d'ondes que l'on nomme selon le milieu dans lequel elles se propagent. Ainsi, il y a des ondes sonores, lumineuses, électromagnétiques, mécaniques (transverses et longitudinales), sismiques etc.

Vitesse et période d'une onde

La vitesse d'une onde est définie par

$$v = \lambda f$$

où v est la vitesse (m/s)
λ est la longueur d'onde (m)
et f est la fréquence (s^{-1})

Et sa période par $$T = \frac{1}{f}$$

De plus, si l'onde se déplace dans un milieu spécifique, on définit sa vitesse par

$$v = \frac{\sqrt{\text{élasticité du milieu}}}{\sqrt{\text{densité du milieu}}}$$

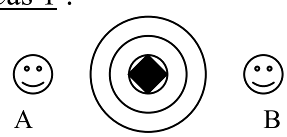
Quelques faits à propos de la vitesse du son

Le son voyage plus rapidement dans les liquides que dans les gaz, et encore plus rapidement dans les solides. De plus, la vitesse du son augmente avec la température.

L'effet Doppler

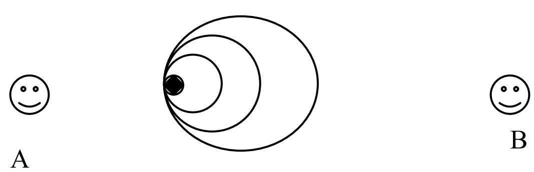
L'effet Doppler vous a été présenté comme étant un changement apparent de fréquence pour un observateur. Le plus souvent, la source sonore produit des ondes en s'approchant ou s'éloignant de l'observateur. Cet effet peut être observé pour tous les types d'ondes. Voici les cas possibles de l'effet Doppler :

Cas 1 :



La source et les deux observateurs sont immobiles. L'observateur A entend la même fréquence que l'observateur B.

Cas 2 :



La source se déplace vers l'observateur A et s'éloigne de l'observateur B. L'observateur A entend donc une fréquence plus élevée, alors que l'observateur B entend une fréquence plus basse. Mathématiquement, l'effet Doppler est défini par

$$f' = f_o\left(1 \pm \frac{v_o}{v_s}\right)$$

où f' est la fréquence entendue par l'observateur

f_o est la fréquence de la source

v_o est la vitesse de la source par rapport à l'observateur

et v_s est la vitesse du son

On utilise le signe positif dans l'équation si la source et l'observateur se déplacent l'un vers l'autre. Dans le cas contraire, si la source et l'observateur s'éloignent l'un de l'autre, on utilise le signe négatif dans l'équation ci-dessus.

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

1. une onde mécanique transversale voyage sur une corde avec une fréquence de 12.0 Hz et une longueur d'onde de 2.40 m. Quelle est la vitesse de l'onde sur la corde? (28.8 m/s)
2. Un homme, assis sur un côté du Grand Canyon, essaie de communiquer avec son ami assis de l'autre côté en criant à plein poumons. En criant, l'homme créé une onde sonore ayant une vitesse de 340 m/s. Son ami, assis de l'autre côté, entant son cri 1.01s plus tard. Quelle est la largeur du Grand Canyon à cet endroit? (171.7 m)
3. Une vague de la mer a une longueur d'onde de 10m. Un observateur distingue un maximum à chaque 9s. Quelle est la vitesse de la vague? (1.1 m/s)
4. Des ondes radio voyagent à une vitesse de 3.00×10^8 m/s dans l'air. Une station de radio locale émet ses ondes radio à une fréquence de 90.0×10^6 Hz.
   a) Calculez la longueur d'onde des ondes radio. (3.30 m)
   b) Combien de longueurs d'onde y a-t-il sur une distance de 1.5 km? (455)
5. Un navire de guerre envoie un signal sonore afin de déterminer la profondeur du fond marin à l'endroit où il est ancré. Pour ce faire, le navire émet un signal sonore dans l'eau et ce dernier revient, après avoir été réfléchi au fond de la mer, 1.95s plus tard. En sachant que la vitesse du son dans l'eau salée est de 1498 m/s, quelle est la profondeur de la mer à cet endroit? (1.46 km)

Auto-évaluation

Avant de commencer cette section sur les ondes, assurez-vous de connaître…

- La définition d'une onde
- Les différents types d'ondes
- Les définitions de milieu, source, propagation, longueur d'onde et amplitude
- Les équations mathématiques définissant
  - La vitesse d'une onde
  - La vitesse en général
  - La période
  - La fréquence
- Pouvoir dessiner approximativement une fonction sinus et en connaître les caractéristiques principales (maximum, minimum, zéros, amplitude etc…)
- L'équation de l'effet Doppler
- Pouvoir choisir le bon signe (±) dans l'équation de l'effet Doppler

3. Nature des ondes

Définition : En physique et en mathématiques, un *champ* est l'association d'une quantité scalaire, vectorielle ou tensorielle à chaque point d'un espace. (De la même façon qu'un champ de blé est l'association d'une tige de blé à chaque point du plan $\Re^2$ constituant le champ.) Le champ est essentiellement une fonction mathématique.

Définition : Une *onde* est une perturbation décrite par un champ. Elle est causée par une source d'ondes. Typiquement, mais pas toujours, elle sera propagée au travers un certain milieu (dit « élastique ») à l'intérieur duquel existe une interaction entre les constituants de ce milieu.

En quelque sorte, le concept d'onde est une généralisation de l'oscillateur harmonique simple. Une onde implique une propagation d'énergie.

Exemples :

- ondes sur une corde : causées par une source de vibration, le milieu élastique est la corde, la fonction est la hauteur de chaque point hors de sa position d'équilibre

- ondes sur l'eau : causées par une source, le milieu élastique est l'eau, la fonction est la hauteur du niveau d'eau en chaque point

- ondes sonores : causées par une source de vibration (cordes vocales, corde de guitare, haut-parleur), le milieu élastique est un fluide ou un solide, et la fonction est la variation de pression

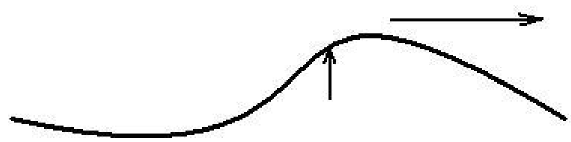
- ondes électromagnétiques : contiennent la lumière visible, ultraviolette, infrarouge, les rayons X, les ondes radio, etc. Causées par des particules chargées qui sont accélérées, la fonction décrit les champs électriques et magnétiques. Pas besoin de milieu élastique et peuvent se propager dans le vide. À la fin du $19^{\text{ième}}$ siècle, on a inventé le concept d'éther comme étant ce milieu élastique. La relativité d'Einstein a rejeté cette hypothèse.

- ondes de probabilité : associées à la description quantique de la nature. La fonction est l'amplitude de probabilité, qui est un nombre complexe dont le carré du module donne la probabilité.

4. Ondes transversales et ondes longitudinales

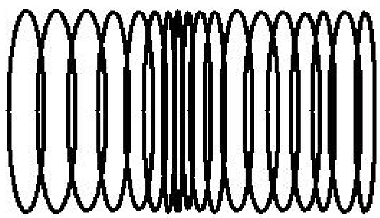
Définition : Une onde *transversale* oscille dans une direction perpendiculaire à la direction dans laquelle est se propage.

Exemple : Onde sur une corde. Si l'onde se propage dans la direction de l'axe *x*, alors la vibration existe dans le plan *yz*. La flèche horizontale de la figure ci-dessous indique le sens de la propagation de l'onde alors que la flèche verticale représente le déplacement d'un point hors de sa position d'équilibre.



Définition : Une onde *longitudinale* oscille dans une direction parallèle à la direction dans laquelle est se propage.

Exemple : Onde sonore. Slinky. À la figure ci-dessous, la propagation de l'onde est horizontale, de même que le déplacement de chaque spire (en anglais, *coil*) hors de sa position d'équilibre.



5. Ondes sur une corde

La vitesse d'une onde sur une corde de densité massique μ et soumise à une tension F est donnée par la relation

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Donc, si on connaît la masse *m* de la corde et sa longueur totale *L*, alors nous avons $v = \sqrt{\frac{F}{\left(m/L \right)}}$.

Analyse dimensionelle : Nous pouvons vérifier la plausibilité du résultat ci-dessus par analyse dimensionelle. En effet, si nous posons $v = F^A \mu^B$, alors en termes d'unités fondamentales, nous trouvons $\mathrm{m\,s^{-1}} = \left(\mathrm{kg}^A \mathrm{m}^A \mathrm{s}^{-2A}\right)\left(\mathrm{kg}^B \mathrm{m}^{-B}\right)$.

En égalisant les différents exposants, nous trouvons

m : $1 = A - B$
s : $-1 = -2A$
kg : $0 = A + B$

qui nous donne $A =$ et $B =$, en accord avec le résultat obtenu. L'analyse dimensionnelle vous sera utile pour la séance de laboratoire sur les ondes.

6. Ondes périodiques sur une corde

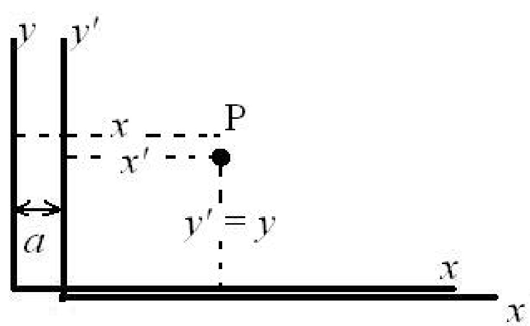
Définition : Une *onde progressive* est une forme d'onde qui avance dans une direction donnée de l'espace.

Considérons la description d'une fonction d'onde se propageant à vitesse constante dans une certaine direction. La méthode est simple : pour décrire la courbe représentée par $y = f(x)$ se déplaçant dans la direction $\pm x$, il s'agit de remplacer

$$x \to x - vt$$

partout dans la fonction, où $v > 0$ indique un déplament vers la *droite*, et $v < 0$ indique un déplament vers la *gauche*.

Pourquoi? La preuve est basée sur l'observation suivante. La figure suivante montre deux systèmes de coordonnées avec des axes *x* et *x'* décalés de *a*, et des axes *y* et *y'* égaux (le dessin montre un décalage négligeable seulement pour pouvoir les distinguer).

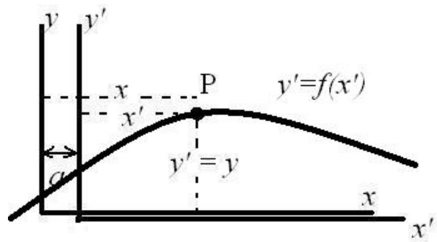


Nous voyons que

$$x' = x - a \text{ et } y' = y\,,$$

où $a > 0$ indique que le système prime est *à droite* du système non-prime, et $a < 0$ indique que le système prime est *à gauche* du système non-prime.

Généralisons l'identification d'un point au cas d'une courbe $y' = f(x')$ dans le système prime, de sorte que la figure devient



De l'équation précédente, nous trouvons que la même courbe est décrite dans le système non-prime par l'équation

$$y = g(x) = f(x-a)$$

Maintenant, si on attache la courbe au système prime, qui, lui, se déplace à vitesse v par rapport au système non-prime, ceci revient à remplacer a par vt.

Exemple (avec calculatrice graphique) : Tracez la fonction $y = \exp\left(-x^2\right)$, qui ressemble à une cloche centrée à $x = 0$. Selon le résultat ci-dessus, pour que cette fonction se déplace vers la droite avec une vitesse égale à 2, nous remplaçons x par $x - 2t$, c.-à-d.

$$y = \exp\left(-(x-2t)^2\right).$$

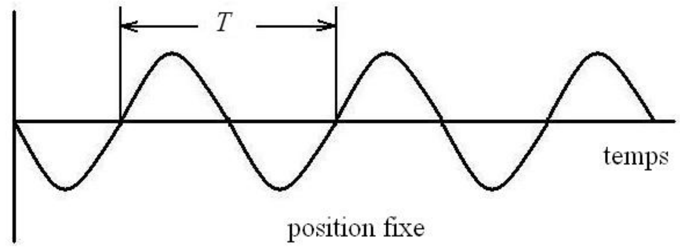
Pour vérifier, faites tracer cette courbe pour $t = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5,$ etc. et vous observerez que les courbes successives se déplacent effectivement vers la droite.

Définition : Une *onde périodique* est formée lorsque la source effectue un mouvement périodique, c.-à-d. qui se répète au bout d'un certain laps de temps appelé *période*. Ce mouvement périodique général peut être décrit mathématiquement au moyen des fonctions sinus, cosinus ou une combinaison de ces fonctions.

Définition : Une *onde (progressive) sinusoidale* est une fonction sinus (ou cosinus, puisque les deux fonctions sont les mêmes, à un décalage près) qui avance dans l'espace.

Attachons un générateur à une extrémité d'une corde. Si ce générateur agite la corde avec une période *T* et une amplitude *A*, alors, éventuellement, *chaque point* de la corde oscillera avec amplitude *A* et période *T*.

Le graphique du déplacement vertical d'un de ces points *en fonction du temps* est comme suit :

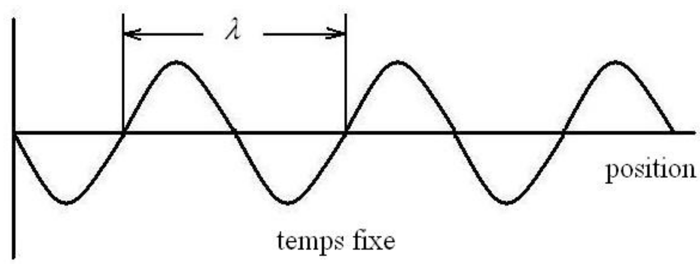


Mathématiquement, ce genre de fonction est décrit par la fonction

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

où *y* décrit le mouvement vertical du point sur la corde en fonction du temps *t*, et ϕ, appelé *constante de phase*, représente la synchronisation, qui consiste à décaler la courbe dans le sens horizontal. (Le graphique spécifique ci-dessus peut être décrit par $y = -A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ ou encore $y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \pi\right)$.)

Au graphique ci-dessus, qui décrit l'onde en un *point donné*, nous pouvons comparer le mouvement de l'onde en un *instant donné*, c.-à-d. en regardant une photographie de l'onde :



Vous voyez qu'il faut parcourir une distance λ afin de couvrir un cycle complet. Nous appelons donc λ la *longueur d'onde* de ce cycle. La fonction décrivant ce mouvement à un instant donné est, en général

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \phi\right)$$

Relation entre T et λ :

Avec une courde donnée sur laquelle est exercée une tension fixe, la période T et la longueur d'onde λ ne peuvent avoir des valeurs arbitraires. En se rappelant, de la section précédente, que la vitesse de l'onde est donnée par $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, nous avons la relation importante :

$$v = \lambda f$$

où nous utilisons la

Définition : La *fréquence* de l'oscillation est $f = \frac{1}{T}$. Elle est mesurée en s^{-1} ou Hertz (Hz).

Pensez à un train constitué de wagons de longueurs λ qui se déplace à la vitesse v. Si vous êtes debout près de la rame, vous observez qu'il s'écoule un temps T (qui est la période) entre le passage de chaque wagon. Par définition, la vitesse du train est égale à la longueur d'un wagon divisée par le temps nécessaire, c.-à-d. T, pour parcourir cette longueur : $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$.

Définition : L'analogue spatial de la fréquence f, qui est le nombre de cycles par unité de temps, est appelé *nombre d'ondes* ν, donné par $\nu = \frac{1}{\lambda}$. C'est le nombre cycles, ou d'ondes, compris dans une unité de distance, ici 1 m.

Définissons $k = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}$, et considérons l'onde décrite, à un instant donné, par

$$y = A\sin(kx)$$

Comment décrire le déplacement de cet onde à vitesse v? D'après ce que nous avons vu au tout début de cette section, il s'agit de remplacer x par $x - vt$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} y &= A\sin(k(x - vt)) \\ &= A\sin\left(\frac{2\pi\, x}{\lambda} - \frac{2\pi vt}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

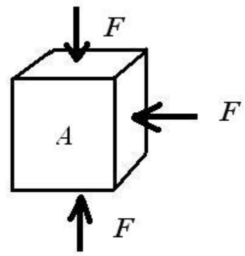
Comme $\frac{v}{\lambda} = f$, nous obtenons

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi\, x}{\lambda} \pm 2\pi\, f\, t\right)$$

avec le *signe négatif si l'onde se déplace vers la droite*, et le *signe positif si l'onde se déplace vers la gauche*. Nous distinguons ces deux signes explicitement car, contrairement à la vitesse v, qui peut être positive ou négative, la longueur d'onde λ et la fréquence f sont toutes deux positives.

7. Ondes sonores

Définition : La *pression* dans un fluide est la force exercée par unité de surface d'un petit volume imaginaire. Par exemple, pour le cube suivant,



dont chaque face a une aire A et subit l'action d'une force F, alors la pression est donnée par

$$P = F / A \qquad \text{(1 Pascal (Pa) = 1 N/m}^2\text{)}$$

La pression atmosphérique qui nous entoure est de 101.3 kPa. Donc, chaque m^2 subit une force de 101300 N. Mais cette force agit de tout côté, de sorte que ça s'équilibre.
Définition : La caractéristique essentielle des *ondes sonores* est que c'est la *pression* du fluide dans lequel l'onde se déplace qui est perturbée. La variation de pression est typiquement de quelques Pascals.

Exemples de source : cordes vocales, haut-parleur, diapason (en anglais, *tuning fork*), cordes (violon, guitare, piano), etc.

Exemples de milieu élastique : fluides liquides (eau, etc.) ou gazeux (air, etc.), solides (tiges de métal, etc.) L'interaction qui permet la propagation est fournie par les liens intermoléculaires.

Vitesse du son : Quelques expressions donnant la vitesse du son.

Vitesse dans l'air en fonction de la température :

$$v = 331.5\sqrt{1+\frac{T[°\mathrm{C}]}{273.15}} \cong 20.1\sqrt{T[°\mathrm{K}]}$$

Les degrés Kelvin (°K) sont reliés aux degrés Celsius (°C) par

$$T(°\mathrm{K}) = T(°\mathrm{C}) + 273.15$$

Pour un gaz idéal,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}} \qquad \text{(en m/s)}$$

avec $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$ (c_P et c_V sont les chaleurs spécifiques à pression et volume constant, respectivement), $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/°K (constante de Boltzmann), *m* est la masse moléculaire en unités atomiques (u), telle que 1 u $= 1.6605 \times 10^{-27}$ kg, et *T* la température du gaz en degrés Kelvin (°K).

Fluide : $$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(en m/s)}$$

avec ρ la densité du fluide (en kg/m^3) et $B = -\dfrac{\Delta P}{\left(\Delta V / V\right)}$ est le *module de compressibilité* du fluide (en N/m^2 ou Pa), qui mesure la force requise pour provoquer une certaine déformation.

Tige solide : $$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \text{(en m/s)}$$

avec ρ la densité du solide et $Y = -\dfrac{\left(F / A\right)}{\left(\Delta L / L_0\right)}$ est la *module de Young* du métal (en N/m^2 ou Pa), qui mesure la force requise pour provoquer une certaine déformation.

<u>Remarque :</u> Les formules pour les fluides et les solides sont analogues à celle pour les ondes sur une corde, $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, car elles contiennent toutes le rapport d'une contrainte, ou force, sur un terme d'inertie, c.-à-d. masse.

8. <u>Intensité sonore et décibels</u>

<u>Définition :</u> L'*intensité sonore I* d'une onde est l'énergie transportée par une onde par unité de temps par unité de surface. Elle est exprimée en Watt/m^2.

L'oreille humaine peut percevoir des intensités comprises dans l'intervalle

$$10^{-12}\ \text{W/m}^2 \leq I_{\text{oreille}} \leq 1\ \text{W/m}^2$$

Ces douze ordres de grandeur représentent un écart énorme, ce qui fait qu'il est utile d'introduire une unité d'intensité sonore basée sur l'échelle logarithmique : les décibels.

Cas d'une source pontuelle : À cause de l'uniformité de l'espace, l'énergie sonore sera distribuée uniformément sur une surface sphérique. L'intensité sonore se lira donc

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Par exemple, si on double la distance à la source, alors l'intensité sera quatre fois plus faible.

Définition : Si un son produit une intensité I, alors le *niveau sonore en décibels* (dB) vaut

$$\beta\,(\text{en dB}) = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, le seuil d'audition de l'oreille humaine.

Ainsi, le niveau sonore correspondant à $I = I_0$ vaut $\beta = 10 \log_{10} \frac{I_0}{I_0} = 0$. Si, au contraire de la relation précédente, nous voulons obtenir *I* pour un β connu, il faut alors utiliser la relation inverse :

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0\ 10^{\beta/10}$$

Exemple : Si deux sources ont des niveaux de 80 dB et 85 dB, respectivement, alors quel est le niveau des deux sons combinés?

Solution : Contrairement à notre première impression, la réponse n'est pas 80 + 85 dB, car il faut additionner les intensités *I*, et non les β . On trouve donc

$$\beta_{\text{total}} = 10 \log \frac{I_{\text{total}}}{I_0} = 10 \log \frac{I_0 10 \qquad + I_0 10}{I_0} = \qquad\qquad \text{dB}$$

Exemple : Si une fillette perçoit un niveau sonore de 140 dB lorsqu'elle se trouve à 30 m d'une source, quel niveau (en dB) percevra-t-elle si elle se trouve à 300 m?

Solution : En multipliant la distance par 10, l'intensité *I* sera réduite par un facteur _________. Il faut cependant calculer le β correspondant, mais on s'attend à une réponse plus petite que 140 dB. Commençons avec la relation

$$\beta_{300\,\mathrm{m}} = 10\log_{10}\frac{I_{300\,\mathrm{m}}}{I_0}$$

Et nous avons $I_{300\,\mathrm{m}} = \frac{I_{30\,\mathrm{m}}}{100} = \underline{\qquad\qquad} = I_0 10 \qquad = 1$, de sorte que

$$\beta_{300\,\mathrm{m}} = 10\log_{10}\underline{\quad} = \qquad \text{dB.}$$

9. Effet Doppler

Définition : L'*effet Doppler* est le changement, entre la fréquence émise par une source sonore et la fréquence perçue par un récepteur, dû à un mouvement relatif entre la source et le récepteur. L'effet Doppler est décrit par la relation suivante :

$$f' = \left(\frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}\right) f$$

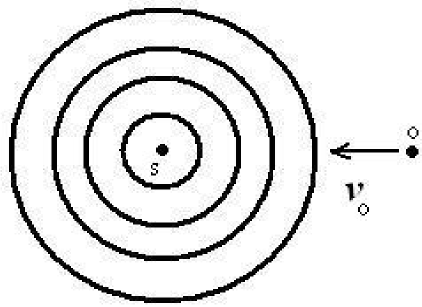
f' est la fréquence perçue à la position de l'observateur
f est la fréquence émise par la source
v est la vitesse du son
v_O est la vitesse de l'observateur
v_S est la vitesse de la source sonore

Signes numérateur : signe *positif* = observateur s'*approche* de la source
signe *négatif* = observateur s'*éloigne* de la source
dénominateur : signe *positif* = source s'*approche* de l'observateur
signe *négatif* = source s'*éloigne* de l'observateur

Le plus simple est de garder à l'esprit que la fréquence augmente lorsqu'il y a un mouvement d'approche relative, puis on choisit les signes appropriés.

Preuve (source au repos et observateur en mouvement) :

Dans ce cas, la longueur d'onde ne change pas; l'effet est dû à ce que l'observateur rencontre les ondes à un rythme différent que s'il était au repos par rapport à la source. Voici le schéma pour le cas où O *s'approche de* S :



La vitesse des ondes sonores par rapport à O est $v' =$ _______ . La longueur d'onde garde sa valeur $\lambda = v / f$, de sorte que la fréquence perçue par O est

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \qquad \vdots f$$

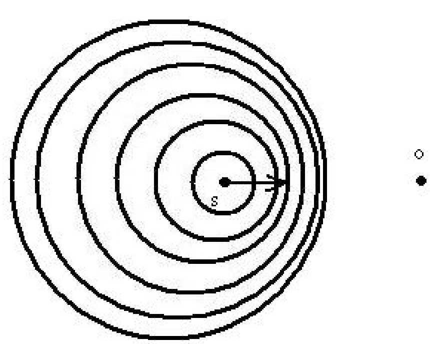
Si O *s'éloigne de* S, la vitesse des ondes sonores par rapport à O est $v' =$ ______ , de sorte que la fréquence perçue par O est

$$f' = \qquad\qquad f$$

Les deux relations précédentes combinées ensemble nous donnent le numérateur de la première équation de cette section.

Preuve (source en mouvement et observateur au repos) :

Ici, l'effet est dû au fait que la longueur d'onde change. Voici le schéma pour le cas où S *s'approche de* O :



Si S était au repos, la distance entre les crêtes (c.-à-d. la longueur d'onde) serait $\lambda = v/f = vT$. Cependant, si S se déplace vers O, la longueur est modifiée car, pendant une période *T*, S parcourt une distance $v_S T$ avant d'émettre l'onde suivante. Entre S et O, la longueur d'onde est réduite à

$$\lambda' = vT - v_S T = \frac{\qquad}{f}$$

Et comme la vitesse des ondes sonores par rapport à O est v, la fréquence perçue par O est donnée par

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\qquad}$$

Si S *s'éloigne de* O, la longueur d'onde effective devient $\lambda' = \frac{v + v_S}{f}$, de sorte que la fréquence perçue par O devient

$$f' = \frac{vf}{v + v_S}$$

Les deux relations précédentes combinées ensemble nous donnent le dénominateur de la première équation de cette section.

Exemple : Une ambulance dont la sirène a une fréquence de 1200 Hz roule à 25 m/s par rapport à un camion immobile. Quelle est la fréquence perçue par le chauffeur du camion lorsque l'ambulance (a) s'en approche, et (b) s'en éloigne. (c) Répondez aux questions (a) et (b) dans le cas où l'ambulance est au repos et le camion se déplace. Prenez la vitesse du son dans l'air égale à 343 m/s.

Solution :

(a) $f' =$ Hz

(b) $f' =$ Hz

(c) Approche : $f' =$ Hz
Éloignement : $f' =$ Hz

Remarquez dans cet exemple que les résultats diffèrent selon que O approche de S à une certaine vitesse, du cas où S approche de O à la même vitesse.

<u>10. Test formatif</u>

1. Une onde a une longueur d'onde 0.30m voyage le long d'un fil de fer mesurant 300m et pesant 30 kg. Une tension de 4 000N sous-tend le fil. Quelle est la vélocité et la fréquence de l'onde sur le fil?

2. Une personne peut savoir si un train s'en vient en mettant son oreille contre le rail de chemin de fer. Combien de temps faudra-t-il à l'onde pour arriver jusqu'à l'oreille de la personne si cette dernière est située à 1 km du train? Assumez que le module d'élasticité du fer est de 2.0×10^{11} N/m^2 et que la densité du fer est de 7.8×10^3 kg/m^3.
3. Une onde sonore de fréquence 5000 Hz est émise vers un objet se déplaçant à une vitesse de 3.50 m/s, et ce, vers une source immobile. Quelle est la fréquence de l'onde réfléchie?
4. Une onde ultrasonore ayant une fréquence de 250 000 Hz est émise par un dauphin.
   a) Quelle serait la longueur d'onde de cette onde dans l'eau?
   b) Quelle serait la longueur d'onde de cette onde dans l'air à 20°C?
5. Une pierre est lancée du haut d'une falaise. Le son de l'éclaboussure causée par la pierre se fait entendre 4.0s plus tard. Si la température de l'air est de 20°C, quelle est la hauteur de la falaise?
6. La variation de pression causée par le passage d'une onde sonore voyageant dans l'air à 0°C est de 3.0×10^{-3} Pa. Sachant que la densité de l'air est de 1.29 kg/m^3, trouvez…
   a) l'amplitude de l'onde sonore si sa fréquence est 100 Hz
   b) l'amplitude de l'onde sonore si sa fréquence est 10 000 Hz
7. Deux ondes sonores ont des amplitudes similaires, mais l'une d'elles a une fréquence deux fois plus élevée que l'autre.
   a) Laquelle des deux ondes créée la plus importante variation de pression et par quel facteur?
   b) Quel est le rapport des intensités des deux ondes?
8. Un moustique, situé à 10 m d'un être humain, émet un son d'une intensité de 0 dB. Quel sera l'intensité de ce son, si ce dernier est produit par un groupe de 100 moustiques?
9. Quelle est l'intensité résultante lorsqu'un son de 80 dB est entendu simultanément avec un son de 85 dB?
10. Un avion émet 2×10^5 J d'énergie par seconde.
    a) Quelle est l'intensité du son à 40 m de l'appareil?
    b) Quelle est l'intensité du son à 1 km de l'appareil?
    c) Quelle est l'intensité du son à 5 km de l'appareil, en considérant l'absorption de l'air?
11. Deux haut-parleurs, situés aux extrémités d'un long corridor, se font face. Ils sont tous deux connectés à une même source émettant une tonalité de 330 Hz. Une personne se déplace d'un des haut-parleurs à l'autre à une vitesse de 1.4 m/s. Quelle est la fréquence du battement entendu par la personne?

12. La vitesse du sang dans l'aorte du cœur humain est habituellement d'environ 0.28m/s. Pour le diagnostic d'une maladie cardiaque, un médecin envoie des ondes ultrasonores ayant une fréquence de 4.2×10^6 Hz et une vitesse de 1500 m/s dans la même direction que la circulation sanguine. Ces ondes ultrasonores seront ensuite

réfléchies sur les globules rouges. Quelle sera la fréquence du battement entendu par le médecin?

13. Un train approche la gare où un homme le regarde passer. Le sifflement de la locomotive a une fréquence de 460 Hz lorsque le train s'approche de la gare et une fréquence de 300 Hz lorsque le train s'éloigne. En assumant que la vitesse du train est constante, quelle est sa vitesse?

Réponses

1. La vélocité de l'onde est 200 m/s et la fréquence est de 210 Hz.
2. La vitesse de l'onde sur le rail de fer est de 5100 m/s et le trajet entre le train et l'observateur prendra 0.20s.
3. 5103 Hz
4. a) 5.76×10^{-3} m
   b) 1.37×10^{-3} m
5. 71 m
6. a) 1.1×10^{-8} m
   b) 1.1×10^{-10} m
7. a) l'onde ayant la plus haute fréquence cause une variation de pression deux fois plus grande.
   b) l'onde ayant la plus haute fréquence possède 4 fois l'intensité de l'autre onde.
8. 30 dB
9. 86.2 dB
10. a) 130 dB
    b) 95 dB
    c) 53 dB
11. 2.7 Hz
12. 1570 Hz
13. 72 m/s

Superposition d’ondes

Sections | Page

1. Rappel de Physique 20 et 30

Les ondes

Les ondes, peu importe leur type, s'influencent les unes les autres et se superposent. Dépendamment de leur amplitude, ces ondes se combinent pour former une onde résultante ayant une amplitude plus faible ou plus élevée que les ondes initiales. Le phénomène de combinaison des ondes est appelé *interférence*. Il existe trois types d'interférence :

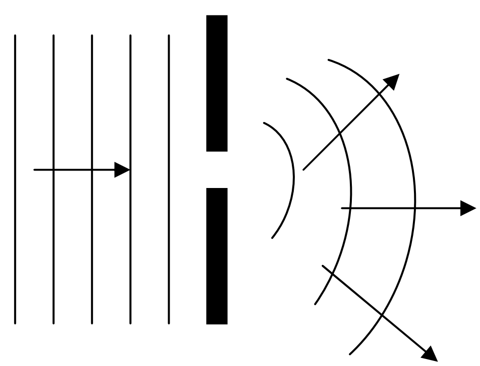
Interférence constructive : la combinaison des ondes produit une onde résultante ayant une amplitude plus grande que les ondes initiales.
Interférence destructive : la combinaison des ondes produit une onde résultante ayant une amplitude plus petite que les ondes initiales.
Interférence stationnaire : se produit lorsque deux ondes identiques se rencontrent pour produire une amplitude maximale aux points maximums (*anti-noeuds*) et une amplitude nulle aux points minimums (*noeuds*).

Une onde stationnaire ne transmet par d'énergie puisqu'elle ne voyage pas. Au contraire, une onde non stationnaire permet le transport d'énergie.

La diffraction

La *diffraction* est le phénomène par lequel *les ondes se déforment* (se courbent) à la sortie d'une petite ouverture. On remarque habituellement que :

-plus la longueur d'onde augmente, plus les effets de la diffraction sont importants.
-tous les types d'ondes peuvent être diffractés.
-le phénomène de diffraction n'est pas applicable aux particules.



Les ondes lumineuses

La lumière peut être considérée comme une particule ou une onde, et ce, par son comportement quelques fois ambigu. La lumière est composée de photons, de petites particules sans masse, qui sont chargées de transporter l'énergie. La lumière se déplace à

$$v = 2.99792458 \times 10^{8} \quad \text{m/s}$$

Les ondes sonores

Les ondes sonores ont cependant une vitesse différente de celles qui sont lumineuses. De plus, leur vitesse dépend de la température de l'air et du milieu de propagation. Les instruments à vent tels que les trompettes, les cors, les tubas et les flutes traversières permettent de créer des sons dont le déplacement est limité par un tuyau ou un tube. Dans le tube, les ondes sonores voyageront librement si ce dernier est ouvert aux extrémités. Cependant, si une des extrémités est fermée, les ondes sonores seront réfléchies et reviendront sur leurs pas. Le premier nœud indique la fréquence fondamentale, alors que les nœuds subséquents représentent des harmoniques (la même note, mais plus aïgue).

Les lasers

La lumière blanche, celle observée tous les jours et provenant du soleil, est un mélange des différentes couleurs du spectre de la lumière. Ces couleurs peuvent être observées puisqu'elles ont des longueurs d'onde spécifiques visibles variant entre 400 et 700 nm. Les lasers sont des appareils qui n'émettent d'une seule longueur d'onde. Par exemple, certains lasers émettent de la lumière rouge ayant une longueur d'onde de 700 nm. D'autres émettent de la lumière mauve, indiquant une longueur d'onde de 400 nm.

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

1. Une onde voyage sur une corde. Un observateur peut mesurer une distance de 10 cm entre deux nodes. De plus, la fréquence de la source produisant l'onde est de 30 Hz.
   a) Quelle est la vitesse de l'onde sur la corde? (20 cm)
   b) Quelle est la longueur de l'onde? (6.0 m/s)
2. Un diapason est utilisé lors d'une expérience de physique. La vitesse du son est de 331 m/s et la distance entre deux maximums sonores est de 80 cm. Quelle est la fréquence du diapason utilisé pour l'expérience? (207 Hz)
3. Un long tube de 20 cm et un oscilloscope sont utilisés pour trouver la vitesse du son. Un étudiant souffle dans le tube et créé un son ayant une fréquence de 428 Hz.
   a) Quelle est la longueur de l'onde sonore dans le tube? (80 cm)
   b) Quelle est la vitesse du son émi par l'étudiant? (342 m/s)
4. Lorsque la température de l'air augmente, la vitesse du son ___________. (augmente)
5. Quelle est la fréquence d'une onde ayant une longueur d'onde de 5 m et une vitesse de 330 m/s? (66 Hz)
6. Quel est le type d'interférence produit lorsque deux ondes se rencontrent pour former une onde résultant de plus grande amplitude? (interférence constructive)
7. Une onde stationnaire peut-elle transporter de l'énergie? Pourquoi? (non, parce qu'elle ne voyage pas.)
8. Deux diapasons, situés l'un près de l'autre, vibrent. C'est un exemple de __________. (l'effet Doppler)
9. Pourquoi la lumière provenant du soleil est-elle blanche? (parce qu'elle est un mélange de toutes les couleurs composant le spectre de la lumière visible).

Auto-évaluation

Assurez-vous de maîtriser les concepts suivants avant de commencer l'étude de cette section

- Définition de la diffraction
- Pouvoir distinguer diffraction, réfraction et réflexion
- Définition d'onde
- Types d'ondes
- Décrire le principe d'interférence
- Pouvoir nommer les 3 types d'interférence

3. Principe de superposition linéaire

Défintion : Le *principe de superposition linéaire* stipule que lorsque plusieurs ondes sont présentes à un certain endroit à un moment donné, alors la perturbation totale est la somme des perturbations des ondes individuelles.

Si, en un certain point de l'espace, la perturbation dûe à la source 1 est décrite par la fonction d'onde $\psi_1(t)$, qu'une perturbation par la source 2 est donnée par $\psi_2(t)$, et ainsi de suite, jusqu'à une source *N*, alors la perturbation résultante est $\psi(t) = \psi_1(t) + \cdots + \psi_N(t)$.

L'épithète *linéaire* implique que ce principe ne s'applique que lorsque les équations qui décrivent le système physique considéré sont linéaires, c.-à-d. tous les termes sont d'ordre un.

Exemple (facultatif) : Si vous connaissez les dérivées, vous pouvez vérifier que si $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des solutions de l'*équation différentielle* (c.-à-d. qui contient des dérivées) $\ddot{\psi} + \dot{\psi} = \psi$, alors la somme, $\psi_1(t) + \psi_2(t)$, est également solution de cette équation. (Notation : chaque point au-dessus de la variable dépendante indique une dérivée par rapport à la variable indépendante *t*.)

Solution : En effet, en remplaçant $\psi_1 + \psi_2$ dans le membre de gauche de l'équation $\ddot{\psi} + \dot{\psi} = \psi$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\psi_1 + \psi_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_1 + \psi_2) &= \frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \psi_1 + \psi_2\end{aligned}$$

où nous avons utiliser le fait que $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des solutions, c.-à-d. $\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = \psi_1$ et $\frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = \psi_2$.

Exemple (facultatif) : Voici un exemple d'équation différentielle non-linéaire. Vérifions que même si $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des solutions de l'équation différentielle $\ddot{\psi}+\psi\dot{\psi}=0$, alors la somme, $\psi_1(t)+\psi_2(t)$, n'est *pas* une solution de cette équation, à cause du terme $\psi\dot{\psi}=0$, quadratique en ψ, et qui brise donc la linéarité de l'équation.

Solution : Le fait que $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ soient des solutions impliquent que $\ddot{\psi}_1+\psi_1\dot{\psi}_1=0$ et $\ddot{\psi}_2+\psi_2\dot{\psi}_2=0$.

Maintenant, regardons si l'expression suivante est nulle:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\psi_1+\psi_2)+(\psi_1+\psi_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_1+\psi_2)=\ddot{\psi}_1+\ddot{\psi}_2+\psi_1\dot{\psi}_1+\psi_1\dot{\psi}_2+\psi_2\dot{\psi}_1+\psi_2\dot{\psi}_2$$

dont le côté droit devient :

$$\overbrace{\ddot{\psi}_1+\psi_1\dot{\psi}_1}^{0}+\overbrace{\ddot{\psi}_2+\psi_2\dot{\psi}_2}^{0}+\psi_1\dot{\psi}_2+\psi_2\dot{\psi}_1=\psi_1\dot{\psi}_2+\psi_2\dot{\psi}_1\neq 0$$

ce qui montre que la somme des solutions n'est pas une solution.

4. Interférence (constructive et destructive) d'ondes sonores

Définition : Nous utiliserons le terme *phase* pour indiquer la position, le temps et la synchronisation de l'onde produite par une source. Mathématiquement, la phase est l'argument de la fonction trigonométrique (sinus ou cosinus) décrivant l'onde. Par exemple, si une onde progressive est décrite par

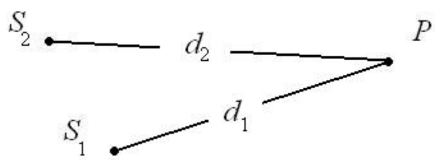
$$y=A\sin(kx\pm\omega t+\phi)$$

alors la phase est égale à $kx\pm\omega t+\phi$. (Rappel : *A* représente l'amplitude, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ est relié à la longueur d'onde λ, $\omega=\frac{2\pi}{T}$ est relié à la période *T*, et ϕ s'appelle *constante de phase* et est relié à la synchronisation.)

Définition : Nous dirons que deux sources *émettent en phase* si elles sont synchonisées, c.-à-d. à chaque source, les ondes atteignent leurs maxima, minima, valeurs nulles, etc. simultanément.

Considérons deux sources S_1 et S_2, qui émettent des ondes sonores semblables de même fréquence et de même amplitude. Il existe deux façons de créer de l'interférence à partir de ces source :

- si elles émettent en phase (c.-à-d. en même temps) mais se trouvent à *différentes distances* d'un point *P* où se trouve un récepteur



On appelle alors *différence de parcours* l'écart spatial

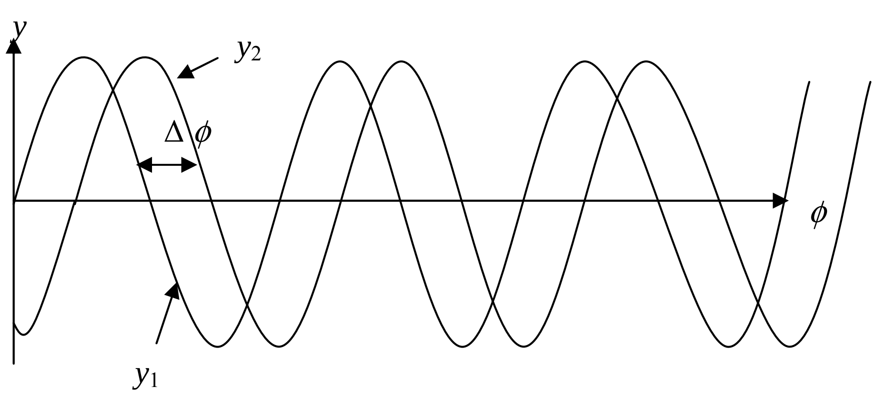
$$\delta = \Delta x = d_2 - d_1$$

- si $d_1 = d_2$, mais que les source ne sont pas synchronisées, c.-à-d. il existe un écart temporel entre leur phase

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

<u>Interférence constructive et destructive</u>

Considérez deux fonctions abstraites : $y_1 = \sin\phi$ et $y_2 = \sin(\phi + \Delta\phi)$. Leurs graphiques ont la forme suivante



<u>Définition :</u> Nous appelons *interférence constructive* l'onde résultant de la somme $y_1 + y_2$ lorsque les ondes sont en phase, c.-à-d. $\Delta\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots, m(2\pi), \ldots$ où *m* est un nombre entier.

Définition : Nous appelons *interférence destructive* l'onde donnée par la somme $y_1 + y_2$ avec inversion des phases, c.-à-d. $\Delta\phi = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots, \left(m + \frac{1}{2}\right)(2\pi), \ldots$ où m est un nombre entier.

Étant donné la relation suivante :

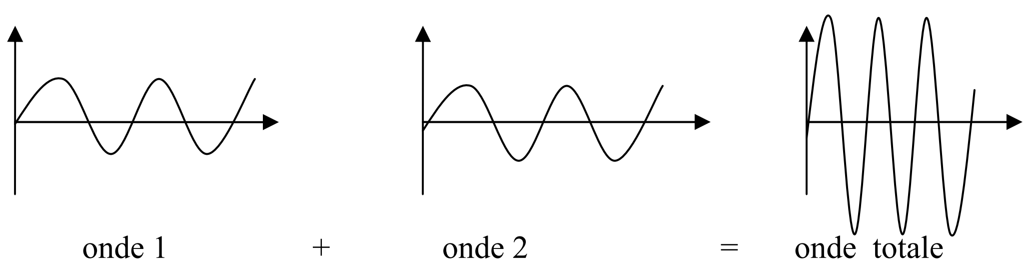
$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T}$$

entre les écarts de variables et leur durée de cycle, nous pouvons établir les conditions d'interférences pour des écarts de distance Δx ou de synchronisation Δt.

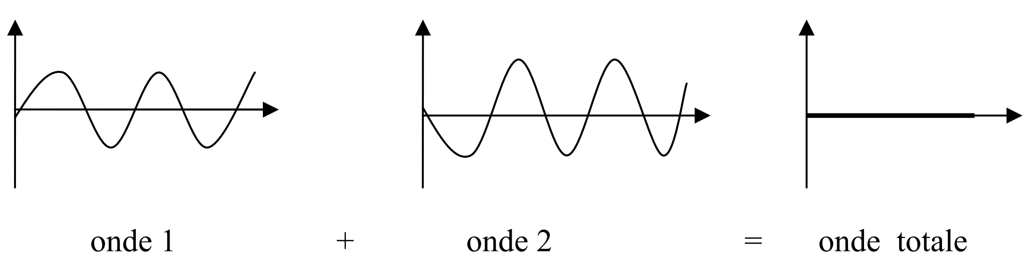
Différence de parcours

La relation précédente nous donne $\Delta x = \frac{\Delta\phi}{2\pi}\lambda$, de sorte que nous aurons

Interférence constructive si $\Delta x = m\lambda$:



Interférence destructive si $\Delta x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$



Exemple : Deux haut-parleurs S_1 et S_2 sont en phase.Leur fréquence est de 95 Hz et ils sont situés à 6.90 m l'un de l'autre. En supposant que la vitesse du son vaut 343 m/s, trouvez, sur la ligne se trouvant entre les haut-parleurs, les trois points où il y a de l'interférence constructive.

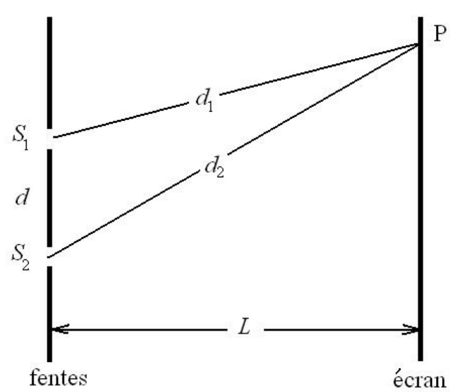
Solution : La longueur d'onde est $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343}{95} =$ m. Désignons la distance entre un point et la source S_1 par la variable *x*. La distance entre S_2 et le même point est donc $6.90 - x$. La condition d'interférence constructive devient

$$\Delta x = (6.90 - x) - x = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

d'où $x =$, qui admet deux possibilités, pour $m = 0$ et $m = 1$. Il y a donc trois points d'interférence constructive, situés à : m, m et m de S_1.

5. Interférence de Young

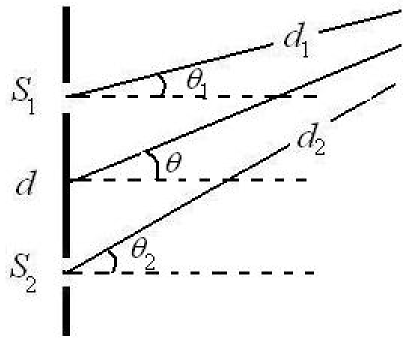
En général, les phénomènes peuvent devenir extrêmement compliqués; il peut y avoir plus de deux sources, qui ne sont pas nécessairement cohérentes, de sorte que leur patrons d'interférence sont pratiquement impossibles à obtenir sans calcul numérique. Ici, nous allons nous limiter à des cas très simples. L'expérience d'interférence la plus simple mais, malgré tout, assez réaliste, est l'*expérience à deux fentes de Young* (en anglais, *Young's double-slit experiment*). Vous observerez ce phénomène en laboratoire. Une vue aérienne d'un schéma expérimental est illustré ci-dessous :



Une source (non illustrée ci-dessus) est à l'extrême gauche, et les ondes (sonores, lumineuses ou autres) frappe un mur (ou une diapositive) dans lequel il y a deux fentes, S_1 et S_2, qui agissent comme des sources secondaires. Les ondes issues de ces fentes parcourent différentes distances (indiquées par d_1 et d_2 ci-dessus) pour atteindre un point P, auquel nous observerons une certaine amplitude. Ici, nous considérons uniquement les

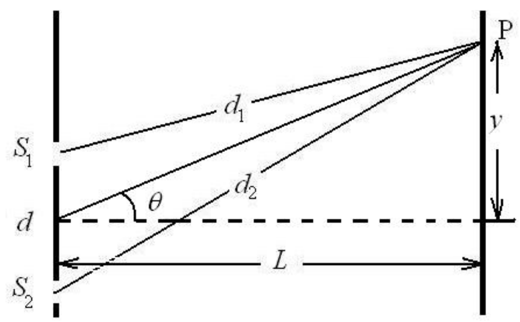
valeurs extrêmes de ces amplitudes : (1) *maximale, ou interférence constructive*, lorsque $\Delta x = d_2 - d_1 = m\lambda$, et (2) *nulle, ou interférence destructive*, si $\Delta x = d_2 - d_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$.
Il nous faut donc un moyen simple de déterminer Δx.

Si la $L >> d$, alors les trois angles ci-dessous sont approximativement égaux, et nous prendrons $\theta_1 \cong \theta_2 \cong \theta$.



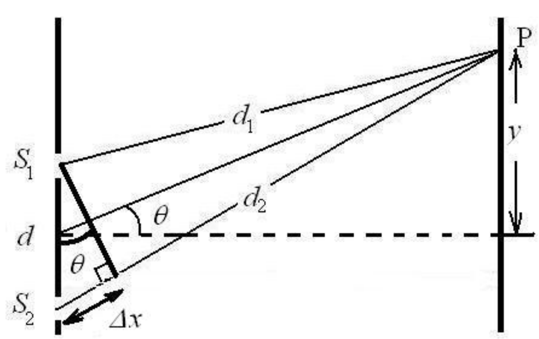
Nous utiliserons donc l'angle θ pour identifier la position du point P. De la figure ci-dessous, nous voyons que la relation entre θ et la coordonnée y est

$$y \cong L \tan\theta$$



Il nous reste à relier l'angle θ à la différence de parcours $\Delta x = d_2 - d_1$. De la figure ci-dessous, nous voyons que

$$\sin\theta = \frac{\Delta x}{d}$$



Ainsi, nous obtenons les conditions suivantes :

Interférence constructive $d\sin\theta = m\lambda$ $m = 0, 1, 2, \ldots$

Interférence destructive $d\sin\theta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ $m = 0, 1, 2, \ldots$

Exemple : De la lumière de longueur d'onde 630 nm frappe deux fentes séparées de 0.8 mm. Et on observe une figure d'interférence sur un écran situé à L = 5 m des fentes. (a) Trouvez les angles θ correspondant aux trois premiers maxima secondaires. (b) À quelle distance y du maximum central trouve-t-on le troisième minimum?

Solution :

(a) Utilisons $\sin\theta = \dfrac{m\lambda}{d}$, avec $d =$ m, $\lambda =$ m, et $m = 1, 2, 3$, car le maximum central correspond à $m = 0$. Les angles trouvés sont $\theta =$, , et , respectivement.

(b) Nous avons besoin de $\sin\theta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{d}$ pour trouver l'angle, que nous substituons ensuite dans $y \cong L\tan\theta$ pour trouver y. Attention : le premier minimum correspondant à $m =$, le troisième minimum est donc donné par $m =$. L'angle est donné par

$$\theta = \arcsin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{6.3\times10^{-7}}{8\times10^{-4}}\right) = 0.11280°$$

d'où

$$y \cong L\tan\theta = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ mm.}$$

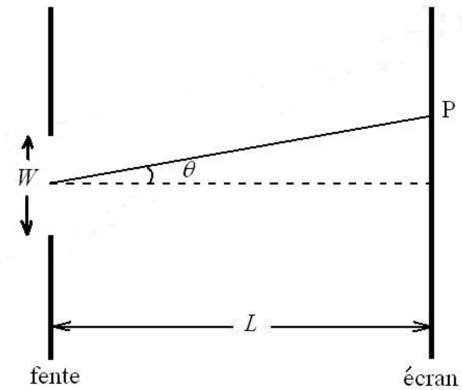
6. Diffraction (ondes sonores et lumière)

Définition : La *diffraction* est, tout comme l'interférence, un phénomène typiquement ondulatoire (c.-à-d. qui ne peut être compris avec un modèle de particules ponctuelles) qui décrit la déviation ou la diffusion des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle.

Comme nous le verrons dans plusieurs cas relativement simples, l'effet de diffraction dépend de la longueur d'onde utilisée et de la taille de l'obstacle de la façon suivante :

diffraction $\propto$ (longueur d'onde)/(taille de l'obstacle)

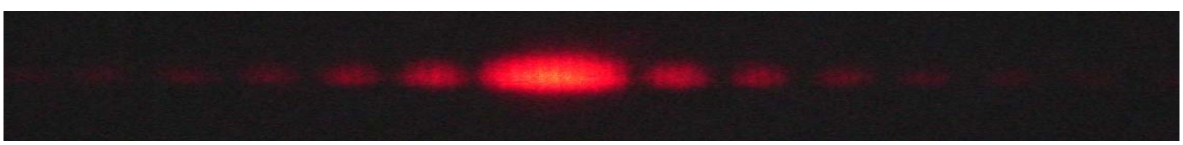
Par exemple, considérons une vue aérienne d'*une fente* de largeur *W*. Une vue aérienne est décrite par le schéma ci-dessous :



Si la lumière incidente a une longueur d'onde λ, alors la position θ des *minima* est donnée par

$$W \sin\theta = m\lambda, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Nous voyons que $\sin\theta = \dfrac{m\lambda}{W}$, ce qui a la forme de la première équation de la présente section. Le patron de diffraction observé sur l'écran a la forme suivante

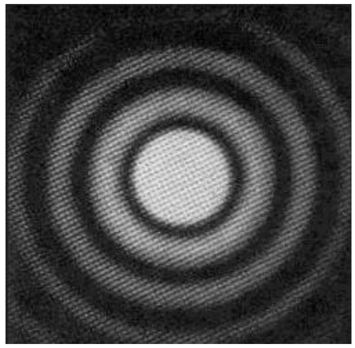


Supposons maintenant que, plutôt qu'une fente, nous ayons une *ouverture circulaire de diamètre D*. Une vue aérienne serait semblable au schéme un peu plus haut, sauf que *W* est remplacé par *D*. Dans ce cas, un calcul compliqué avec des intégrales montre que la position θ du premier minimum de diffraction est donnée par

$$D \sin\theta = 1.22\ \lambda$$

Nous voyons que $\sin\theta = \dfrac{1.22\ \lambda}{D}$, ce qui a la forme de la première équation de la présente section.

Le patron de diffraction observé sur l'écran a la forme suivante



Exemple : Un son de fréquence 2200 Hz est émis d'un haut-parleur circulaire de rayon 10 cm. Si la vitesse du son dans l'air est de 340 m/s, trouvez l'angle de diffraction θ qui correspond à la position du premier minimum.

Solution : $\theta = \arcsin\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$, où $\lambda = \frac{v}{f}$. Nous trouvons (Attention: $D = 2\,R$!)

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1.22}{\_\_\_\ f}\right) = \arcsin\left(\frac{1.22\times 340}{0.20\times 2200}\right) = 70.5°$$

Exemple : En pratique, au lieu d'une figure d'interférence pure, on observera plutôt sur l'écran une figure qui est un mélange de patrons d'interférence et de diffraction, dans lequel certains maxima d'interférence sont absents parce qu'ils correspondent à des minima de diffraction. Ceci est dû à la largeur finie de chaque fente. Si on observe la figure ci-dessous à l'aide de deux fentes séparées de 1.2 mm, quelle est la largeur de chacune de ces fentes ?

Solution : Les maxima d'interférence sont donnés par $d\sin\theta_I = m_I\lambda$, tandis que les minima de diffraction sont décrits par $W\sin\theta_D = m_D\lambda$. Nous donnons $d = 1.2\times 10^{-3}$ m, et cherchons W. La longueur d'onde λ est inconnue, mais inutile. Comme nous cherchons les endroits où un minimum de diffraction coïncide avec un maximum d'interférence, nous avons $\theta_I = \theta_D$. Ceci nous donne

$$\sin\theta = \frac{m_I\lambda}{d} = \frac{\quad}{W}$$

d'où

$$W = \qquad .$$

La figure nous indique que le premier minimum, $m_D = 1$, correspond à $m_I = 6$. La largeur de chaque fente est donc $W = \frac{(1)(1.2 \text{ mm})}{6} = 0.20$ mm.

7. Battements d'ondes sonores

Définition : Un *battement* résulte de la combinaison de deux sons dont les fréquences sont légèrement différentes. L'onde résultante est un son de fréquence égale à la moyenne des deux fréquences initiales, mais dont l'amplitude oscille à la *fréquence de battement*, qui est la différence des fréquences de départ.

Mathématiquement, nous avons

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi_1(t) + \psi_2(t) \\ &= a\cos(\omega_1 t) + a\cos(\omega_2 t) \\ &= 2a\cos\left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]\end{aligned}$$

avec l'identité trigonométrique

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right).$$

Nous obtenons finalement:

$$\psi(t) = 2a\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]$$

Le second facteur cosinus décrit une oscillation de fréquence moyenne, $\frac{f_1 + f_2}{2}$, tandis queue le premier facteur décrit une enveloppe oscillant plus lentement, à la fréquence de battement :

$$f_{\text{batt.}} = |f_1 - f_2|$$

8. Ondes stationnaires sur une corde

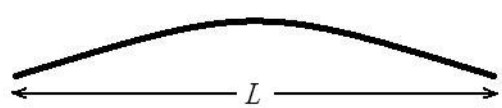
Définition: Une *onde stationnaire*, comme son nom l'indique, ne se propage pas. Chaque point subira une oscillation locale, mais certains points restent sur place, et il n'y a pas de propagation d'énergie.

Remarque : Il peut être utile de voir une onde stationnaire comme le résultat de deux ondes progressives semblables, mais circulant dans des sens opposés. Si nous représentons ces deux ondes par $\psi_1(t) = a\sin(kx - \omega t)$ et $\psi_2(t) = a\sin(kx + \omega t)$, la somme qui en résulte est

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi_1(t) + \psi_2(t) \\ &= a\sin(kx - \omega t) + a\sin(kx + \omega t) \\ &= 2a\cos(\omega t)\sin(kx)\end{aligned}$$

On peut regarder cette fonction comme une onde stationnaire $\psi(t) = a(t)\sin(kx)$, dont l'amplitude $a(t) = 2a\cos(\omega t)$ dépend du temps. Cependant certains points, appelés *nœuds*, ont un déplacement nul en tout temps. En effet, $\sin(kx) = 0$ aux points x tels que $kx = m\pi$, et comme $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, nous trouvons que ces points sont à $x = \dfrac{m\lambda}{2}$.

Si une onde stationnaire est établie sur une corde de longueur *L*, la question se ramène à déterminer une fonction sinusoïdale telle que les deux extrémités sont toujours au repos. Le *mode fondamental* consiste à prendre la forme suivante :



Comme la longueur de la corde est égale à une moitié d'onde, alors la longueur d'onde λ_1 de ce mode est donnée par

$$\lambda_1 = 2L$$

et la *fréquence fondamentale* f_1 vaut

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}.$$

Le mode suivant consiste à placer une onde complète sur la corde, de sorte que $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}\lambda_1 = L$ et la fréquence de ce mode est $f_2 = \dfrac{2v}{\lambda_2} = 2f_1$.

En procédant de façon semblable pour les modes supérieurs, nous trouvons que leurs longueurs d'onde respectives valent

$$\lambda_n = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{2L}{n}$$

et leurs fréquences sont données par

$$f_n = nf_1 = n\left(\frac{v}{2L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Pour une corde donnée, on appelle le mode pour lequel $n = 1$ le *mode fondamenta*l, et les modes $n = 2, 3, 4, \ldots$ s'appellent *harmoniques* (en anglais, *overtones*).

Un son de guitare, violon, piano, etc. contient en réalité les premiers modes de vibration. La fréquence de la note entendue est la fréquence fondamentale.

9. Ondes stationnaires dans un tube ouvert ou fermé

Des sons produits sur des objets tels la flute, le saxophone, la trompette, une bouteille, etc. sont compris de façon similaire aux ondes stationnaires sur une corde, à quelques différences près. Deux points importants sont à considérer :

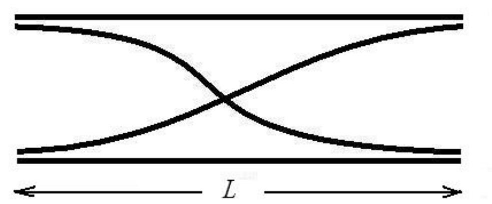
- L'oscillation des molécules tend vers *zéro* au fur et à mesure qu'on s'approche d'une *paroi fermée*. Ceci est analogue à la section précédente; les extrémités sont fixes.

- L'oscillation des molécules est *maximale* près d'une extrémité *ouverte*. C'est parce que, de façon générale, le déplacement des molécules est contraire à celui de la variation de pression. À une extrémité ouverte, la pression est égale à la pression atmosphérique, ce qui implique une variation de pression nulle, d'où l'oscillation maximale des molécules.

Ci-dessous, nous distinguons deux cas : (1) le *tube ouvert*, qui est *ouvert à ses deux extrémités*, comme le saxophone, et (2) le *tube fermé*, qui est *ouvert à une extrémité et fermé à l'autre extrémité*, comme souffler dans une bouteille. (Le cas du tube fermé aux deux extrémités ne nous intéressent pas, puisque le son ne peut s'en échapper.)

Tube ouvert

L'oscillation des molécules dans le *mode fondamental* a la forme suivante :



Par conséquent, une moitié de longueur d'onde est égale à la longueur du tube :

$$\lambda_1 = 2L$$

et sa fréquence vaut

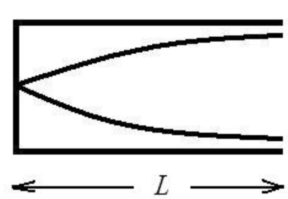
$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}\,.$$

La suite de la discussion est analogue au cas des ondes sur une corde. La fréquence des harmoniques supérieurs est donné par :

$$f_n = nf_1 = n\left(\frac{v}{2L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Tube fermé

En tenant compte des points rappelés au tout début de cette section, nous trouvons que l'oscillation des molécules dans le *mode fondamental* est donné par la configuration suivante :



Autrement dit, la longueur du tube vaut un quart de la longueur d'onde du mode fondamental, de sorte que

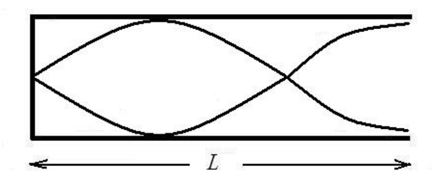
$$\lambda_1 = 4L$$

et sa fréquence vaut

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$$

Il faut cependant être prudents avec les modes supérieurs. Par exemple, le mode suivant ne correspond pas à $n = 2$, car ça impliquerait une oscillation nulle aux deux extrémités, alors qu'une d'elles est ouverte.

Le mode suivant correspond plutôt à $n = 3$:



En effet, nous voyons de cette figure que $\lambda_3 = \frac{4L}{3}$ et la fréquence est

$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = 3\frac{v}{4L} = 3f_1$. De la même façon, les modes $n = 2, 4, 6, \ldots$ ne sont pas définis.

Nous trouvons donc

$$f_n = nf_1 = n\left(\frac{v}{4L}\right), \quad n = 1,3,5,\cdots$$

10. Test formatif

1. Un fil de fer pesant 2 g et ayant une longueur de 1.0 m est soumis à une tension de 9.8 N.
   a) Trouvez la vitesse d'une onde transversale voyageant sur ce fil.
   b) Trouvez la fréquence que la vibration de la corde à sa première harmonique.
2. Si la tension est ajustée à 10 N, une vibration ayant une fréquence de 100 Hz produira la troisième harmonique d'une onde stationnaire. Si la corde mesure 2m de longueur, Trouvez:
   a) la vitesse de l'onde sur la corde
   b) la masse de la corde
3. Un tuyau ouvert produit la troisième harmonique d'une onde stationnaire ayant fréquence de 1000 Hz à 20ºC. Quelle est la longueur du tuyau?
4. Un étudiant frappe deux diapasons et entend 3 battements par seconde. Si l'un des diapason a une fréquence de 512 Hz, quelle est la fréquence de l'autre diapason?
5. Un tuyau semi-fermé a une longueur de 1 m. Un étudiant place une guitare à L'entrée du tuyau et pince la corde pour la faire vibrer. La corde de la guitare a une longueur de 0.5 m et une masse de 0.001 kg. La corde qui vibre produit

l'harmonie fondamentale dans l'air ambient, et la troisième harmonique dans le tuyau. Assumez que la vitesse du son dans le tuyau est de 340 m/s.

a) Quelle est la fréquence du son produit dans le tuyau?
b) Quelle est la tension de la corde de la guitare?

6. Une corde d'une longueur de 8 m est attachée à un point fixe à l'une de ses extrémités. À l'autre, une masse de 40 g y est attachée. Si la tension dans la corde est de 49 N, trouvez
   a) la position des nœuds pour la troisième harmonique
   b) la fréquence de vibration de la troisième harmonique
7. Comment la température de l'air influence-t-elle l'ajustement musical d'un instrument à vent?
8. Un tuyau semi-fermé mesure 1.52 m de longueur. Quelle est la plus basse fréquence produite par le tuyau si la température de l'air est de 37ºC?
9. Une première mandoline a des cordes soumises à une tension de 200 N. La deuxième mandoline, légèrement désaccordée, a des cordes soumises à une tension de 196 N. Si la fréquence des deux cordes est de 523 Hz, combien de battements sont entendus à chaque seconde?
10. Un étudiant tient un diapason ayant une fréquence de 256 Hz. L'étudiant se met à marcher vers un mur à une vitesse constante de 1.33 m/s.
    a) Quelle est la fréquence du battement que l'étudiant entend entre le son du diapason et son écho?
    b) À quelle vitesse doit-il s'éloigner du mur pour pouvoir entendre un battement ayant une fréquence de 5 Hz?
11. Un laser, ayant une longueur d'onde de 632.8 nm, émet un faisceau lumineux qui traverse deux fentes distantes de 0.2 mm. Un observateur observe le réseau de diffraction sur un écran situé à 5 m des fentes. Quelle est la distance entre deux franges brillantes sur l'écran?
12. Une lampe au mercure (λ = 546.1 nm) est utilisée pour émettre un rayon lumineux traversant deux fentes distantes de 0.25 mm. Un patron d'interférence est observé sur un écran situé 1.2 m plus loin.
    a) Quelle est la distance entre le maximum central et la première frange brillante?
    b) Quelle est la distance entre les deux premières franges sombres?
13. Un étudiant observe des lignes spectrales de premier ordre créées par un réseau de diffraction. Les lignes spectrales sont observées à des angles de 10.1°, 13.7° et 14.8° respectivement. Si le réseau de diffraction compte 3660 fentes/mm,
    a) Quelle est la longueur d'onde de la lumière observée à chacun des angles?
    b) A quels angles peuvent être observés ces mêmes lignes spectrales au deuxième ordre?
14. Une lumière émettant une longueur d'onde de 587.5 nm illumine une fente ayant une largeur de 0.75 mm.
    a) À quelle distance de la fente l'écran devrait-il être placé si l'on veut observer la première frange sombre?
    b) Quelle est la largeur du maximum central?

15. Une source lumineurse émet deux longueurs d'ondes principales: une orange (λ= 610 nm) et une bleue-verte (λ=480 nm). Un spectre est formé lorsque la lumière provenant de la source lumineuse traverse un réseau de diffraction ayant 5 000 lignes/cm. Ce spectre est observé sur un écran situé à 2 m du réseau de diffraction. Quelle est la distance entre deux lignes spectrales du second ordre?

16. Une source lumineuse (λ=546 nm) produit un patron d'interférence de Young dont la seconde frange sombre est située à 18 arc-minute du maximum central. Quelle est la distance entre les fentes laissant passer la lumière?

Réponses

1. a) 70 m/s
   b) 70 Hz
2. a) 133 m/s
   b) 0.00113 kg
3. 0.515 m
4. 509 ou 515 Hz
5. a) 256 Hz
   b) 130 N
6. a) 18.6 Hz
   b) 0.267m, 5.33 m, 8 m
7. Lorsque la température augmente, la vitesse du son dans l'instrument à vent augmente, ce qui produit un son plus aigü (en anglais *sharp*). Lorsque la température diminue, le son devient plus grave (en anglais *flat*).
8. 58 Hz
9. 5.26 battements/s
10. a) 1.98 battements /s
    b) 3.40 m/s
11. 1.58 cm
12. a) 2.6 mm
    b) 2.62 mm
13. a) 479 nm, 647 nm et 698 nm
    b) 20.5°, 28.3° et 30.7°
14. a)1.1m
    b) 1.7 mm
15. 44.5 cm
16. 0.156 mm

<u>Lumière</u>

1. Rappel de Physique 20 et 30

La dualité de la lumière

La lumière est une forme d'énergie qui se déplace, sous forme d'ondes ou de particules. Le principe selon lequel la lumière se comporte parfois comme une ondes et parfois comme une particule est appelé *dualité de la lumière*. La lumière voyage toujours à la même vitesse, soit 2.9908 x 10^8 m/s.

L'équation d'onde universelle

La vitesse d'une onde lumineuse peut être trouvée en utilisant l'équation

$$v = \lambda f$$

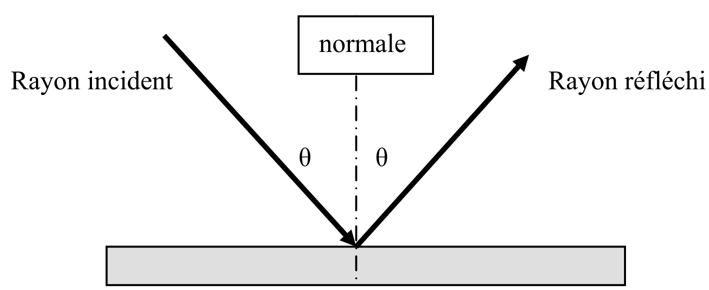
Et la relation entre sa période et sa fréquence est

$$T = \frac{1}{f}$$

La couleur d'une onde lumineuse est le plus souvent due à sa fréquence ou à sa longueur d'onde. Si un rayon lumineux n'est composé que d'une seule fréquence (ou longueur d'onde), comme par exemple pour le laser, on le dit *monochromatique.*

Les phénomènes lumineux

La *réflexion* est le phénomène par lequel *une onde lumineuse est réfléchie avec le même angle, de l'autre côté de la normale*.



La réfraction est le phénomène par lequel la trajectoire d'une onde lumineuse sera changée (courbée, poussée) lorsque l'onde passe d'un milieu à un autre. La loi de Snell-Descartes décrit le comportement d'un rayon lumineux lors d'un changement de milieu

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i}$$

Plus le rayon lumineux est poussé vers la normale (axe perpendiculaire à la surface entre les deux milieux), plus la vitesse du rayon lumineux est petite. De plus, cela signifie aussi que l'indice de réfraction du deuxième milieu est plus grand que celui du premier milieu.

En changeant de milieu,

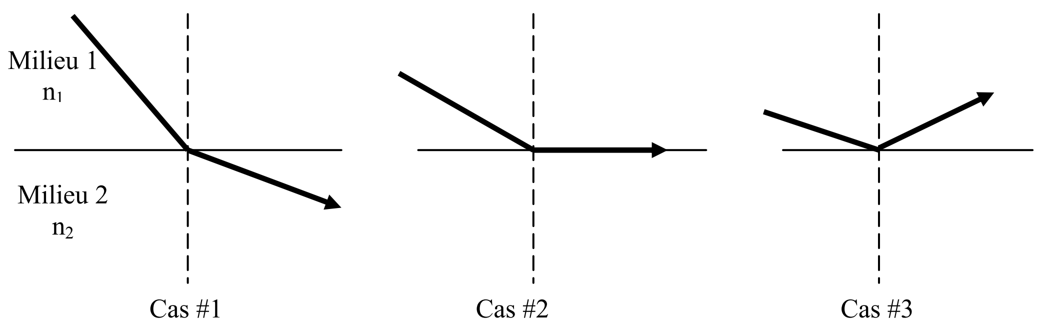
- *L'angle change*
- *La longueur d'onde change*
- *La vitesse change*
- *L'indice de réfraction*

Cependant,

La fréquence ne change pas

L'angle critique est l'angle limite auquel le rayon réfléchi se met à voyager le long de la surface entre les deux milieux. Ce phénomène requiert un deuxième milieu moins dense (indice de réfraction plus petit) que le premier.

Angles, réfraction et réflection



Où $n_1 > n_2$

Cas #1 : l'angle d'incidence est assez petit pour que la réfraction puisse avoir lieu
Cas #2 : l'angle d'incidence est égal à l'angle critique. Le rayon réfléchi voyage sur la surface entre le milieu 1 et le milieu 2.
Cas #3 : l'angle d'incidence est plus grand que l'angle critique. Il n'y a plus de réfraction possible. On appelle ce phénomène *réfraction totale interne*.

La réflexion totale interne peut être observée que si le deuxième milieu est moins dense que le premier.

2. Quiz préparatoire et auto-évaluation

1. L'indice de réfraction du diamant est de 2.42, alors que celui de l'air est de 1.00. Quelle est la valeur de l'angle critique pour la surface diamant/air? (24.4°)
2. Un faisceau lumineux voyage de l'air (n=1.00) au verre (n=1.52) et du verre à l'eau (n=1.33). L'angle incident dans l'air est de 40°, quelle est la valeur de l'angle de réfraction dans l'eau? (28.9°)
3. Un superfluide, à une température près du zéro absolu, est utilisé pour ralentir la lumière à une vitesse de 17 m/s seulement. Quel est l'indice de réfraction du superfluide? ($1.8 / 10^7$)
4. Un nageur sous l'eau voit les rayons lumineux du soleil entrant l'océan à un angle réfracté de 25°. Quel est l'angle d'incidence des rayons lumineux? (34.2°)
5. Un rayon laser voyage de l'air (n=1.00) à un milieu inconnu. L'angle d'incidence est de 48° et celui de réfraction 29°. Quel est l'indice de réfraction du milieu inconnu? (n=1.53)
6. En utilisant la question 5., quelle est la vitesse de la lumière dans le milieu inconnu? (1.96×10^8 m/s)

Auto-évaluation

Assurez-vous de bien maîtriser les concepts suivants avant de commencer l'étude de cette section.

- La loi de Snell-Descartes
- La définition de l'angle critique
- La définition de la réflexion totale interne
- Le concept de densité
- Pouvoir différencier réflexion, réfraction et diffraction
- La définition de réflexion
- La définion de réfraction
- L'équation d'onde universelle
- Comment tracer la trajectoire de rayons lumineux
- Comment tracer la normale à une surface
- Les conditions nécessaires pour la réflexion totale interne
- Les conditions nécessaires pour l'angle critique

3. Nature de la lumière

Dans le formalisme de la physique classique, c.-à-d. non quantique, la lumière consiste en ondes électromagnétiques. Plus particulièrement, la *lumière visible* a une fréquence située dans l'intervalle $400 \leq \lambda_{\text{vis}} \leq 700$ nm.

$$F_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

où $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$ C²/Nm²

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A

La vitesse *c* de la lumière dans le vide est donnée par

$$c = 2.99792458 \times 10^{8} \text{ m/s}$$

qui est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$!

Ce lien entre l'optique (c.-à-d. la vitesse de la lumière) et l'électromagnétisme (c.-à-d. les constantes ε_0 et μ_0, deux disciplines que l'on croyait séparées, est un argument de plausibilité pour l'idée que *la lumière est une onde électromagnétique : elle consiste en champs électriques et magnétiques oscillant*. Et ce n'est pas tout : les ondes électromagnétiques décrivent beaucoup plus que la lumière visible. Voici un tableau du spectre électromagnétique

type d'ondes	***longueurs d'onde***	***commentaires***
ondes radio	$10 \text{ m} \le \lambda_{\text{rad}}$	produites par charges accélérées dans des conducteurs; sytèmes de communication
micro-ondes	$0.1 \le \lambda_{\text{micro}} \le 30$ cm	appl. : systèmes radars, études d'atomes et molécules
lumière infra-rouge	$700 \text{ nm} \le \lambda_{\text{IR}} \le 1 \text{ mm}$	aussi appelées *heat waves* en anglais; facilement absorbées par plusieurs matériaux appl. : physiothérapie, photographie IR, vibrations atomiques
lumière visible	$400 \le \lambda_{\text{vis}} \le 700$ nm	partie du spectre perceptible par l'oeil humain
lumière ultra-violette	$0.6 \le \lambda_{\text{UV}} \le 400$ nm	le soleil en est une source importante; captées dans l'atmosphère
rayons X	$10^{-4} \le \lambda_{\text{X}} \le 10$ nm	source importante : collision d'électrons énergétiques avec du métal; appl. : diagnostiques médicaux, traitement du cancer
rayons gamma	$10^{-14} \le \lambda_{\text{gamma}} \le 10^{-10}$ m	émis par des noyaux radioactifs; pénètre facilement plusieurs matériaux et dommageables pour les tissus vivants

Cependant, malgré tous les succès du modèle ondulatoire de la lumière, nous verrons à la section 7 (plus bas) que la lumière se comporte parfois comme une particule. Mentionnons, entre autres choses, qu'une onde de fréquence *f* est alors associée à une particule quantique d'énergie proportionelle à *f*. Ces idées ont mené à l'édification de la théorie quantique.

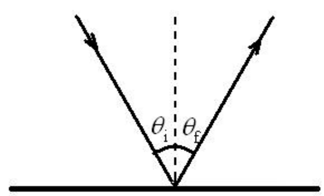
4. Réflexion de la lumière

Définition : Un *rayon lumineux* est une courbe avec une direction en tout point perpendiculaire aux fronts d'ondes de la perturbation qui se propage. La direction du rayon correspond à la direction dans laquelle se propage la perturbation.

Loi de la réflexion : Cette loi stipule que le rayon incident sur une surface réfléchissante est réfléchi symétriquement par rapport à la normale à la surface :

$$\theta_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{r}}$$

où les angles sont définis par le schéma ci-dessous



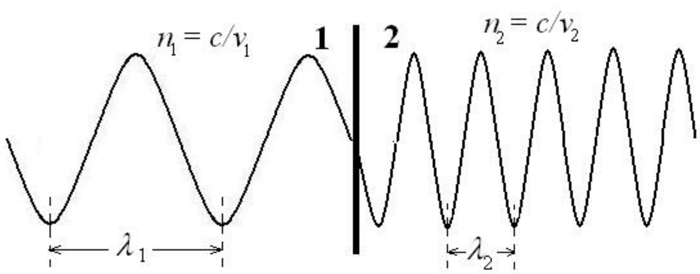
Les problèmes impliquant cette loi sont souvent difficiles car ils impliquent des notions de géométrie.

5. Réfraction de la lumière

La vitesse de la lumière dépend du milieu dans lequel elle se propage. Égale à $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s dans le vide, la vitesse est réduite d'un facteur *n* lorsqu'elle se propage dans un fluide quelconque, où

$$n \equiv \frac{c}{v}$$

est appelé indice de réfraction de ce milieu. Tel qu'illustré ci-dessous, lorsqu'une onde passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2, la fréquence demeure constante, de sorte que le changement de vitesse occasionne un changement de longueur d'onde.



La longueur d'onde change donc comme suit :

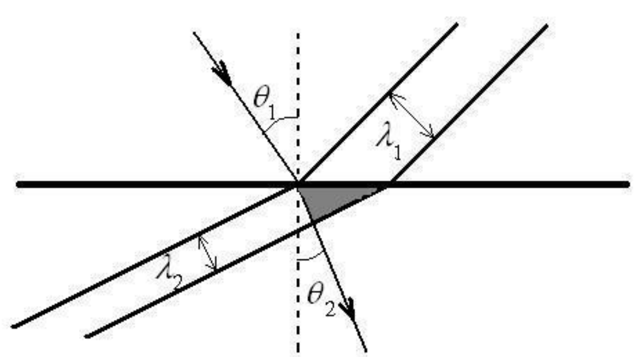
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2/f}{v_1/f} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2/c}{v_1/c} = \frac{n_1}{n_2}$$

Question : À la figure précédente, quel indice est le plus grand, n_1 ou n_2 ?

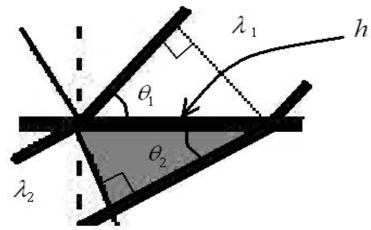
Tableau d'indices de réfraction (pour $\lambda_{\text{vide}} = 589$ nm)	
substance et conditions	indice de réfraction n
air (0 ºC)	1.000293
eau (20 ºC)	1.333
glycérine (20 ºC)	1.473
alcool éthylique (20 ºC)	1.361
benzène (20 ºC)	1.501
zircon (20 ºC)	1.923
glace (0 ºC)	1.309
voûte (en anglais glass crown, 20 ºC)	1.52
diamant (20 ºC)	2.419

Loi de Snell-Descartes :

La figure ci-dessous représente des fronts d'onde droits se propagent dans la direction indiquée par leurs rayons, et qui frappent une surface deux milieux, d'indice de réfraction n_1 et n_2.



Les deux fronts d'onde de la partie supérieure sont séparés de λ_1 tandis que les deux de la partie inférieure sont séparés de λ_2. Agrandissons la partie triangulaire ci-dessous afin de trouver une relation entre λ_1, λ_2, n_1 et n_2 :



Le côté de longueur *h* est l'hypoténuse de deux triangles couchés l'un sur l'autre. Par définition du sinus, nous trouvons $\sin\theta_1 = \dfrac{\lambda_1}{h}$ et $\sin\theta_2 = \dfrac{\lambda_2}{h}$, d'où $h = \dfrac{\lambda_1}{\sin\theta_1} = \dfrac{\lambda_2}{\sin\theta_2}$, de sorte qu'en utilisant aussi $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \dfrac{n_1}{n_2}$, nous obtenons la *loi de Snell-Descartes* :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

6. Réflexion totale interne

Lorsque la lumière passe d'un milieu d'indice faible à un milieu d'indice plus élevé, il y a un angle d'incidence θ_{i} au-delà duquel il n'y a plus de diffraction. Cet angle θ_{i}, que l'on appelle *angle critique* θ_{c}, est tel que l'angle réfracté est égal à 90º. Si $\theta_{\mathrm{i}} > \theta_{\mathrm{c}}$, alors il n'y a pas de réfraction, de sorte que toute l'onde est réfléchie. Nous parlons alors de *réflexion totale interne*.

L'angle critique θ_{c} est obtenu de l'information précédente:

$$n_{\mathrm{i}} \sin\theta_{\mathrm{c}} = n_{\mathrm{f}} \sin 90°$$

de sorte que

$$\sin\theta_{\mathrm{c}} = \frac{n_{\mathrm{f}}}{n_{\mathrm{i}}}$$

Comme $0 < |\sin\theta| \leq 1$, nous trouvons que $n_{\mathrm{f}} < n_{\mathrm{i}}$, c.-à-d. la lumière passe vers un milieu d'indice plus faible. Pour résumer :

- pour $n_{\mathrm{i}} > n_{\mathrm{f}}$, si $\theta_{\mathrm{i}} < \theta_{\mathrm{c}}$, on a réflexion et réfraction
- pour $n_{\mathrm{i}} > n_{\mathrm{f}}$, si $\theta_{\mathrm{i}} \geq \theta_{\mathrm{c}}$, on a que de la réflexion sans réfraction
- pour $n_{\mathrm{i}} < n_{\mathrm{f}}$, si $\theta_{\mathrm{i}} < \theta_{\mathrm{c}}$, alors on a réflexion et réfraction

Remarquez que la réflexion est toujours présente. Il n'y a que la réfraction qui s'absente, lorsque l'angle d'incidence est plus grand que l'angle critique θ_c.

Exemple : L'angle critique pour le passage de l'eau à l'air est

$$\sin\theta_c = \frac{1.000293}{1.333} \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{1.000293}{1.333}\right) = 48.6°$$

Question : Quel est l'angle critique pour le passage de l'air à l'eau ?

Exemple : L'angle critique pour le passage du verre vers l'eau est

$$\sin\theta_c = \frac{1.333}{1.52} \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{1.333}{1.52}\right) = 61.3°$$

7. Nature quantique de la lumière

Cette section n'est qu'un bref survol de la description quantique de la lumière et de la matière. Si le temps nous le permet, d'autres exemples seront discutés en classe.

Concept de photon

En décembre 1900, le physicien Max Planck a supposé que l'énergie associée à une onde lumineuse ne prenait pas n'importe quelles valeurs continues, mais qu'elle était *quantifiée*. Ceci signifie que de la lumière de fréquence f peut avoir comme énergie des multiples entiers (et positifs) de

$$E = hf$$

où $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s, est appelée *constante de Planck*. (Plus spéciquement, Planck a remplacé une intégrale sur les énergies continues par une somme discrète, dans sa description du rayonnement du *corps noir*.)

Exercice : Vérifiez que les unités de chaque côté de cette équation soient compatibles.

En 1905, Einstein a reprit cette idée en introduisant le concept de *photon* afin d'expliquer l'*effet photoélectrique*. (Ce sont d'ailleurs ces travaux qui lui ont valu le prix Nobel en 1921, et non ces travaux sur la relativité restreinte ou la relativité générale.)

Définition : Un *photon* peut être compris naïvement comme étant une particule, ou *quantum*, de lumière. Ainsi, de la lumière de fréquence *f* peut être vue comme un jet de photons ayant une énergie *E*, donnée ci-dessus.

Définition : L'*effet photoélectrique* est une expérience où de la lumière est projetée sur un métal, éjectant ainsi des électrons contenus dans ce métal. Les électrons ainsi éjectés sont appelés *photoélectrons*. Sans entrer dans les détails, mentionnons que certaines propriétés des photoélectrons (énergie cinétique, travail d'éjection du métal, intensité) ne peuvent être expliquées avec un modèle ondulatoire de la lumière.

Ainsi, la lumière, que l'on croyait être une onde pure, se comporte parfois comme un jet de particules.

Un autre aspect du concept de photon est que de la lumière de longueur d'onde λ est associé à des particules ayant une quantité de mouvement

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Définition: L'*effet Compton* explique la collision entre des électrons (ou autre type de particules) et de la lumière. On observe alors que la longueur d'onde de la lumière, initialement λ_0, devient égale à

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

où m est la masse de l'électron, *c* la vitesse de la lumière dans le vide (voir début de cette section), et θ est l'angle entre la vitesse finale de l'électron, initialement au repos dans le laboratoire, et la vitesse de la lumière incidente. La différence $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ est parfois appelée *décalage de Compton* (en anglais, *Compton shift*).

Tout comme l'effet photoélectrique, l'effet Compton ne peut être expliqué par le modèle ondulatoire de la lumière.

Dualité de la matière

Nous avons vu plus haut que la lumière a un caractère dual : elle se comporte tantôt comme une onde, tantôt comme des particules. Nous discutons ci-dessous l'affirmation équivalente pour les particules (électrons, protons, etc.)

En 1923, Louis de Broglie (se prononce « breuil », comme dans « feuille »), dans sa thèse de doctorat propose que considérer une particule d'énergie *E* comme étant une onde de fréquence

$$f = \frac{h}{E}$$

Et si sa quantité de mouvement est *p*, alors on lui associe une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Il s'agit donc des équation introduites précédemment.

Application : Le *microscope électronique* (en anglais, *electron microscope*) est basé sur les caractéristiques ondulatoires des électrons. Son principe est semblable à celui du microscope optique, avec la lumière remplacée par des « ondes d'électrons ». Cependant, la résolution du microscope électronique est beaucoup meilleure dans les électrons peuvent avoir de plus grandes quantités de mouvement et donc, de la relation précédente, de plus petites longueurs d'onde. Il peut distinguer des objets typiquement des centaines de fois plus petits que les microscopes conventionels.

Une technique d'étude de la nature ondulatoire des électrons est de les faire diffracter, chose impossible s'ils ne sont pas ondulatoires. La diffraction des électrons est illustrée dans des expériences de type Davisson et Germer (1927), qui ont découvert ce phénomène accidentellement, suite à un bris de leur équipement!

> *Ainsi, les électrons (et autres particules), que l'on croyait être des particules semblables à des grains de sable, se comportent parfois comme des ondes.*

Fonction d'onde

L'onde associé à la lumière ou aux particules (électrons,etc.) est typiquement décrite par une fonction d'onde $\Psi(x,t)$. Cette fonction provient de l'*équation de Schrödinger*, qui est une équation différentielle décrivant l'environnement dans lequel la particule étudiée est plongée. Le physicien anglais Max Born (et grand-père de la chanteuse australienne Olivia Newton-John) eu l'idée audacieuse que le carré $\left[\Psi\left(\vec{x},t\right)\right]^2$ de cette fonction d'onde décrit la probabilité de présence de l'objet au point $\vec{x}$ à l'instant *t*. C'est là qu'Einstein décroche de la théorie quantique, affirmant : « Dieu ne joue pas aux dés avec l'Univers ».

Tout comme un son ordinaire est constitué de plusieurs fréquences ou longueurs d'onde (c.-à-d. de différents harmoniques, rencontrés au chapitre *Superposition d'ondes*, un système physique est également décrit par plusieurs fréquences ou longueurs d'onde. Si l'on veut localiser une particule dans l'espace, c.-à-d. lui allouer un étalement spatiale typique de Δx, alors il faut des ondes de différentes longueurs d'onde, qui reliés à la quantité de mouvement, sont telles que le *principe d'indétermination (ou d'incertitude) de Heisenberg* est satisfait :

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Cette équation est souvent interprétée comme le fait qu'*il est impossible de déterminer à la fois la position exacte et la quantité de mouvement exacte d'un objet quantique.* Si on connaît l'un des deux avec précision, alors l'autre est moins bien mesuré.

De la même façon, pour localiser une particule dans le temps, c.-à-d. qu'elle soit définie sur un intervalle de temps Δt, alors il faut des ondes de différentes fréquences. Comme ces fréquences sont reliées à l'énergie, un résultat mathématique nous conduit à l'autre forme du *principe d'indétermination de Heisenberg* :

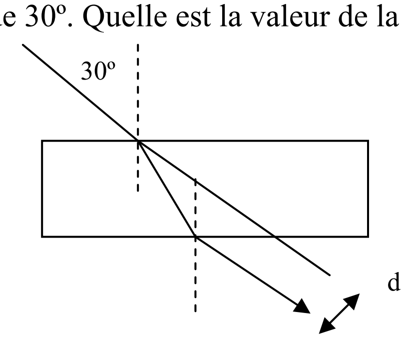
$$\Delta t \, \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}$$

Malgré l'absence de déterminisme et d'apparents mystères, ou paradoxes, entourant la physique quantique, cette théorie fonctionne remarquablement bien. Elle n'a pas encore été contredit expérimentalement, et ces applications pratiques, très nombreuses, ne cessent de croître jusqu'à ce jour.

8. Test formatif

1. un rayon lumineux (λ_0) a une longueur d'onde de 438 nm dans l'eau et de 390 nm dans le benzène.
   a) Quelle est la valeur de λ_0 ?
   b) Quel est la valeur du rapport $n_{benzene}/n_{eau}$?

2. Un rayon lumineux incident (n_{air} = 1.00) frappe une surface glacée (n_{eau}=1.33) avec un angle de 40º avec la normale. Une partie du rayon est réfléchie, tandis qu'une autre est réfractée. Quel est l'angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi?
3. Une lumière émet une longueur d'onde de 632.8 nm dans l'air. La lumière passe de l'air au zircon (n=1.923).
   a) Quelle est la vitesse de la lumière dans le zircon?
   b) Quelle est la longueur d'onde de la lumière dans le zircon?
   c) Quelle est la fréquence de la longueur d'onde?
4. Un rayon lumineux voyageant dans l'air rencontre un bloc de verre (épaisseur 2 cm) avec un angle de 30º. Quelle est la valeur de la distance d montrée sur le schéma suivant?



Lumière

5. Calculez l'angle critique d'un rayon lumineux (λ = 589 nm) voyageant de l'air à chacun des matériaux suivants:
   a) Zircon (n = 1.929)
   b) Fluorite (n= 1.434)
   c) Ice (n= 1.309)
6. Une couche de glace flotte sur l'eau. Un rayon lumineux voyageant dans l'air, frappe la glace avec un angle de 30º pour ensuite voyager dans l'eau. Quel est l'angle de réfraction dans l'eau?
7. Dessinez le tracé lumineux d'un rayon passant de l'air à l'eau et de l'eau à l'huile. L'angle d'incidence est de 25º.
8. Quelle est l'équation utilisée pour trouver l'indice de réfraction?
9. Décrivez, en vos propres mots, l'effet Compton.
10. Expliquez ce qu'est le principe de dualité de la lumière.
11. Expliquez ce qu'est la réflexion totale interne.

Réponses:

1. a) 584 nm
   b) 1.12
2. 111º
3. a) 1.559 x 10^8 m/s
   b) 329 nm
   c) 4.738 x 10^{14} Hz
4. 0.388 cm
5. a) 31.3º
   b) 44.2º
   c) 49.8º
6. 22º
7. sans solution
8. n = vitesse lumière dans le vide /vitesse lumière dans milieu
9. sans solution
10. la lumière se comporte parfois comme une onde et parfois comme une particule
11. Les rayons lumineux ne sont pas réfractés parce que l'angle incident est trop grand.

Outils mathématiques pour la physique

1. Chiffres significatifs

Définition: Un chiffre significatif est une partie d'un nombre qui est connue précisément.

1. N'importe quel chiffre est significatif
2. Le cas spécial du zéro
   - zéro peut aussi être un chiffre significatif
   - exception : lorsque le zéro indique la position d'une décimale, c.-à-d. lorsqu'il n'y a pas d'autres chiffres non-nuls à sa gauche. Dans ce cas, zéro n'est pas significatif. On pourrait alors utiliser la notation exponentielle.

(Dans la plupart des exercices de physique, on utilise 2 ou 3 chiffres significatifs.)

Exemples :

a) 0.12345 compte *cinq* chiffres significatifs. Le zéro indique ici la position d'une décimale et *n'est donc pas significatif*. Nous aurions pu écrire 1.2345×10^{-1}.

b) 1.20564 compte *six* chiffres significatifs. Le zéro n'indique pas la position d'une décimale et *est donc significatif*, comme tout autre chiffre.

Addition et soustraction

Règle : Le résultat d'une addition ou d'une soustraction doit avoir *autant de décimales* que le nombre qui en a le moins.

Exemples :

a) $3.236 + 1.04 = 4.276 = \quad 4.28$
3 déc. 2 déc. $\Rightarrow$ 2 déc.

b) $5.00298 - 3.9089230 = 1.094057 = \quad 1.09405$
6 déc. 8 déc. $\Rightarrow$ 6 déc.

Multiplication et division

Règle : Le résultat d'une addition ou d'une multiplication ou d'une division doit avoir *autant de chiffres significatifs* que le nombre qui en a le moins.

Exemples :

a) $12.71 \times 3.26 = 41.4346 =$ 41.4
4 c.s. 3 c.s. $\Rightarrow$ 3 c.s.

b) $36.333 \div 2.571 = 14.13185530922 =$ 14.13
5 c.s. 4 c.s. $\Rightarrow$ 4 c.s

Remarque: Comme l'illustre cet exemple, vous pouvez garder autant de précision que le permet votre calculatrice au cours de vos calculs. Vous ne garderez que le nombre approprié de chiffres qu'à la fin (habituellement 2 ou 3).

2. Unités

Dans le *système international* (SI ou MKSA) d'unités, toutes les quantités physiques sont basées sur trois unités :

- mètre (m) pour la longueur
- kilogramme (kg) pour la masse
- seconde (s) pour le temps
- ampère (A) pour le courant électrique

Toutes les autres unités (Newton, Coulomb, etc.) peuvent être exprimées à partir de ces trois unités fondamentales.

3. Systèmes de coordonnées

Il existe plusieurs systèmes de coordonnées utilisés en physique. Les plus populaires sont les coordonnées cartésiennes, polaires et sphériques :

Coordonnées cartésiennes

- en deux ou trois dimensions
- deux ou trois variables nécessaires : x, y et z
- les axes sont perpendiculaires entre eux

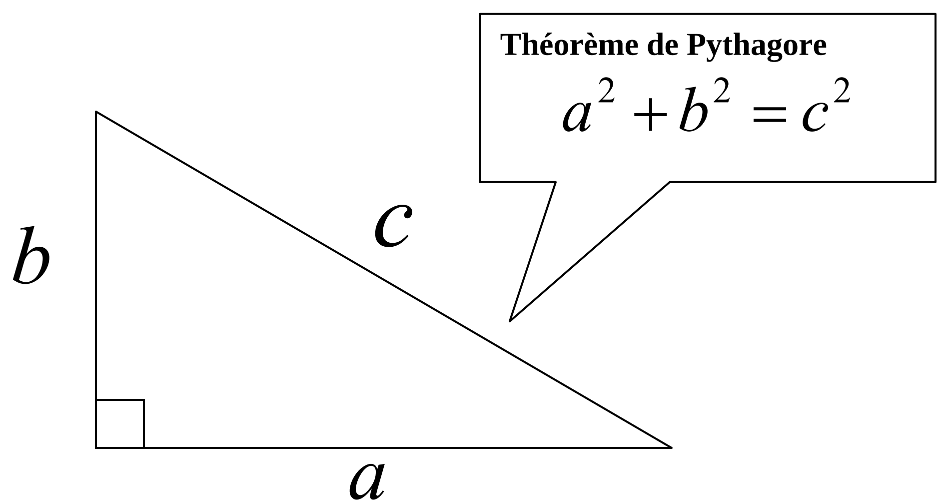
Coordonnées polaires

- en deux dimensions
- deux variables requises : r et θ
- les axes sont placés perpendiculairement
- changement de variables nécessaire : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$

Coordonnées sphériques

- en trois dimensions
- les variables sont essentiellement le rayon r, la longitude θ et la latitude ϕ
- non nécessaires pour ce cours, utilisées en MATH 214, MATH 215 etc.

4. **Théorème de Pythagore** (en anglais, *Pythagorean Theorem*)



- à utiliser avec un *triangle rectangle* seulement.

- les unités utilisées ne sont pas importantes, en autant qu'elles soient toutes les mêmes, par ex. a, b et c sont en mètres.

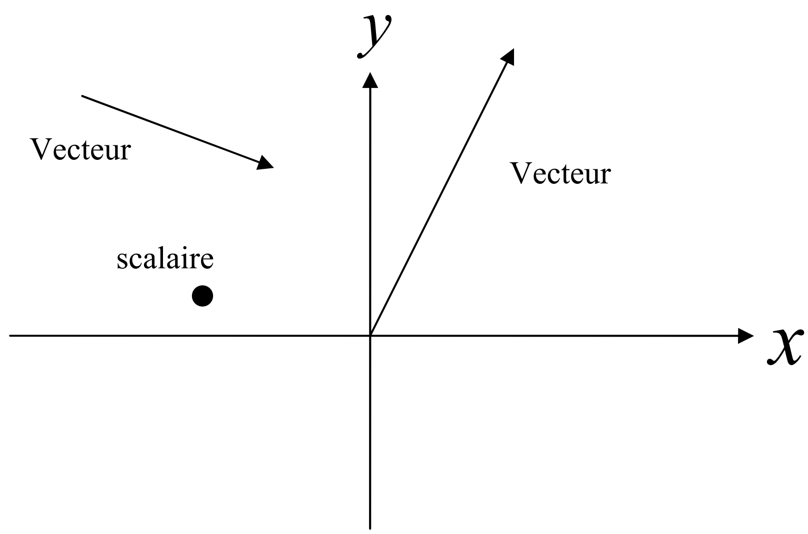
- utiles pour les composantes de vecteurs, des diagrammes divers, etc.

5. **Scalaires et vecteurs** (en anglais, *scalars* et *vectors*)

Définitions :

- Un *scalaire* est une quantité déterminée par *une grandeur* seulement.
- Un *vecteur* est utilisé pour représenter une quantité déterminée par : (1) un *module* (ou grandeur), et (2) une *direction* (angle et sens, gauche ou droite, horaire ou

antihoraire). En n dimensions, il faut n variables pour définir un vecteur, par ex. les trois variables x, y et z pour $n = 3$. Une quantité physique vectorielle est représentée par un caractère gras ***F*** ou une flèche $\vec{F}$. Sa grandeur est écrite F, $|\vec{F}|$ ou |***F***|.



<u>6. Unités d'angles</u>

Bien que vous soyez habitués à exprimer les angles en *degrés*, en physique, on se sert aussi des *radians*. L'équivalence suivante vous sera donc utile :

$$360^\circ = 2\pi \text{ radians}$$

Ainsi, n'oubliez pas de régler votre calculatrice en mode *radians* si vous utilisez les angles en radians, afin de calculer des fonctions trigonométriques (sinus, cosinus etc.)

<u>Exemple</u> :

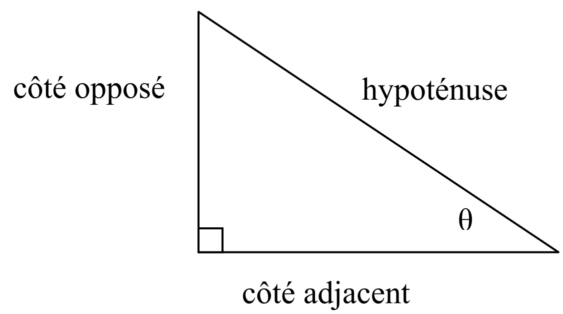
Si $\quad 360° = 2\pi$ radians
alors $\quad 90° =$? radians

$90° = 90° \times (1) = 90° \times 2\pi / 360° = \pi/2$

7. Trigonométrie

La trigonométrie est un outil mathématique très utile en physique. Voici un court rappel des principales fonctions trigonométriques. À l'aide du *triangle rectangle* ci-dessous, nous définissions les quantités suivantes :

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Pour un triangle arbitraire, nous avons :

Loi des sinus

$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$$

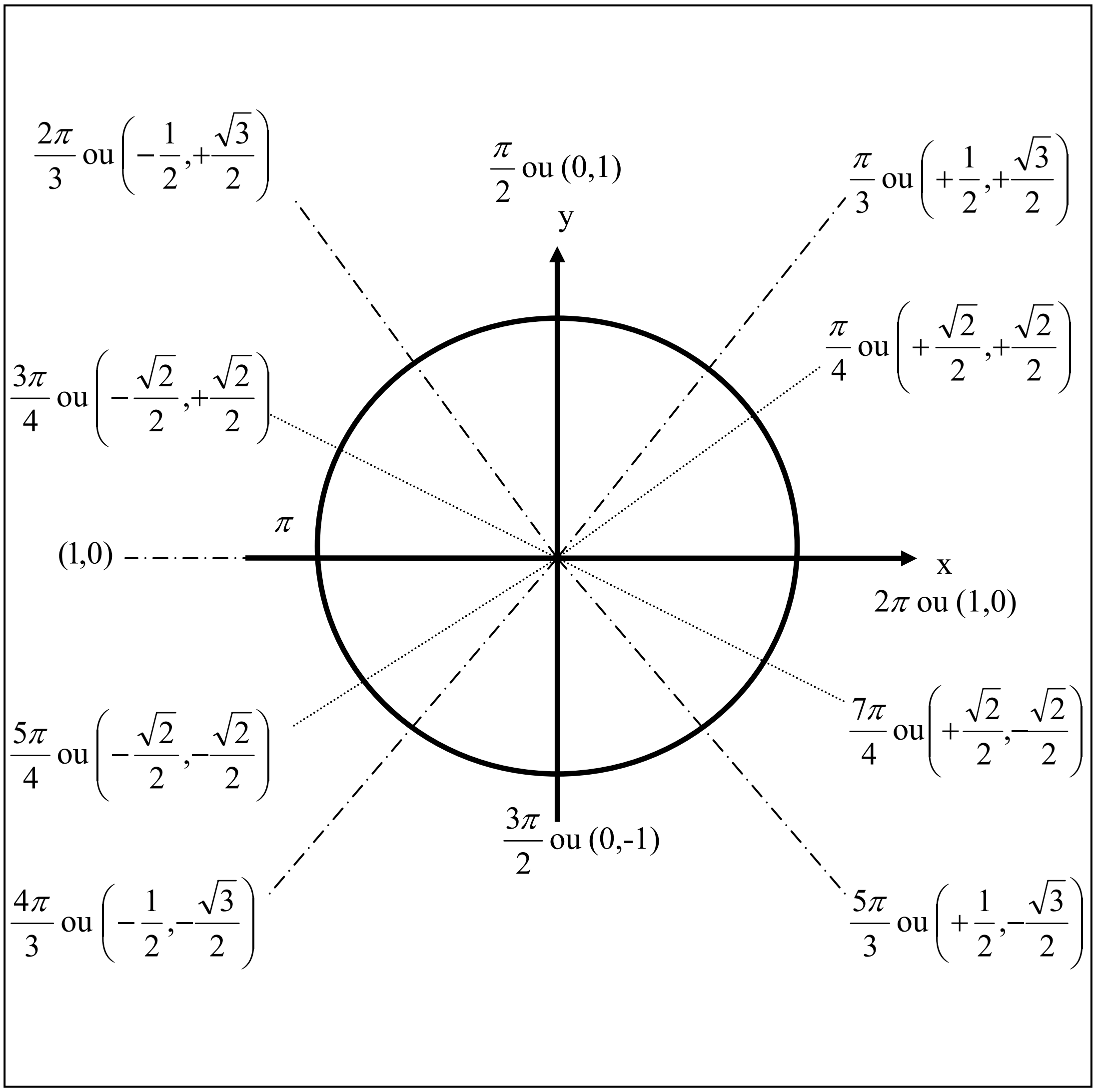
où α, β, γ sont les angles opposés aux côtés A, B, C

Loi des cosinus

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma$$

où A, B, C sont les longueurs des côtés du triangle et γ est l'angle entre A et B

Cercle trigonométrique



Le cercle trigonométrique est utilisé en physique pour des problèmes liés à l'énergie de rotation, les angles, la fréquence, la période, les ondes etc.

Exemples :

a) Que vaut cos (π/2)?

Puisque le point cartésien associé à π/2 est (0,1), cos (π/2) correspond au x du point cartésien. Donc, la réponse est 0.

b) Que vaut sin (π/4) ? $\frac{\sqrt{2}}{2}$

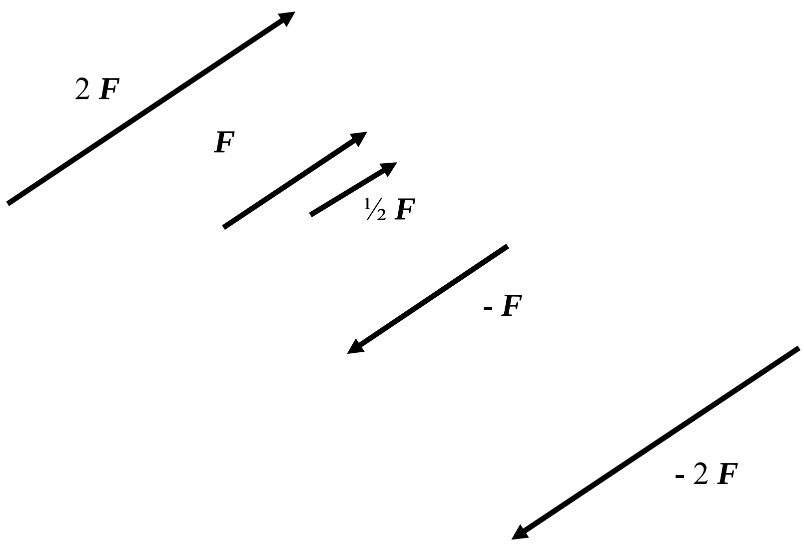
8. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit un vecteur ***F*** (ou $\vec{F}$**)**, de grandeur F, et k une quantité scalaire (seulement un chiffre sans orientation). Alors, nous pouvons former un nouveau vecteur *k**F*** en multipliant ***F*** par le scalaire *k*. Le vecteur *k**F*** a la même direction que ***F***, mais sa grandeur est donnée par

$$kF = k\left|\vec{F}\right|$$

Note : Si k est négatif, alors le vecteur *k**F*** pointe dans la direction opposée à ***F***.

<u>Exemples :</u>

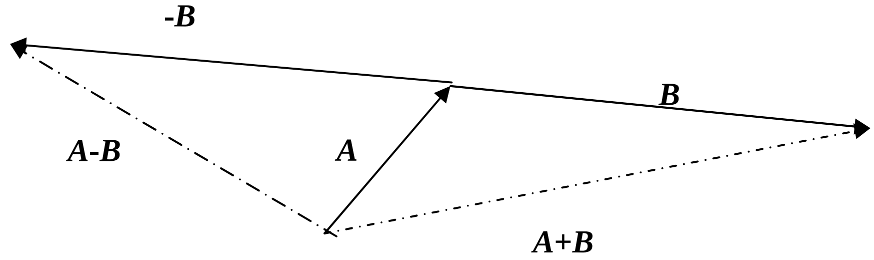


9. Addition et soustraction de vecteurs

<u>Méthode géométrique</u>

- disposer les vecteurs bout-à-bout, l'origine d'un vecteur étant au bout de l'autre vecteur.
- tracer le vecteur résultant en commençant à l'origine du premier vecteur et terminant au bout du second vecteur.

Exemple :



Méthode algébrique

- tracer tous les vecteurs dans un plan cartésien, tous commençant à l'origine.
- tracer un tableau comprenant une ligne et deux colonnes pour chaque vecteur.
- prendre un vecteur à la fois et le séparer en composante x et y.
- inclure les signes de chaque composante.
- Vérification de vos valeurs :
  Le théorème de Pythagore doit fonctionner pour chacun des vecteurs décomposé. On peut donc vérifier que :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |\text{vecteur}|$$

- une fois le tableau compléter, additionner la colonne des x et la colonne des y. Celles-ci vous donnent les deux composantes du vecteur résultant ou, si vous préférez, les deux côtés d'un triangle rectangle.
- appliquer le théorème de Pythagore pour trouver la grandeur du vecteur résultant.
- vous pouvez utiliser les deux composantes du vecteur pour trouver l'angle en utilisant la relation

$$\tan\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

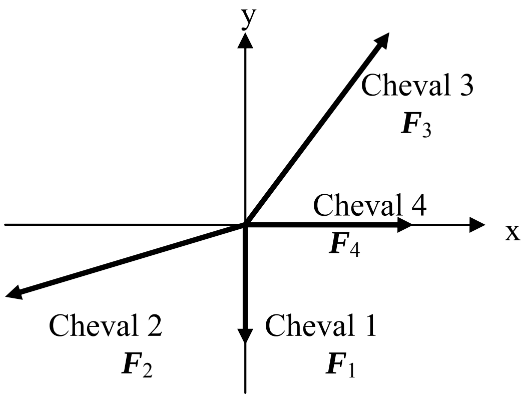
Pour la *soustraction*, on utilise une méthode semblable. Cependant, on additionne le vecteur opposé :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Il faut

- mettre ***A*** et ***B*** dans le tableau
- renverser les signes de ***B*** puisqu'il est soustrait
- additionner par composante, comme pour l'addition

<u>Exemple</u> : Un chariot est tiré par quatre chevaux têtus qui tirent chacun dans leur direction. Le cheval 1 tire le chariot vers le sud avec une force de 15N. Le cheval 2 tire le chariot 20° sous l'ouest avec une force de 60 N. Le cheval 3 tire le chariot 50° au nord de l'est avec une force de 40N. Finalement, le cheval 4 tire le chariot vers l'est avec une force de 10 N. Quelle est la force résultant appliquée sur le chariot?



Forces des chevaux	***x***	***y***
$\boldsymbol{F_1}$	0	$-F_1$
$\boldsymbol{F_2}$	$-F_2 \cos 20°$ $= 60 \cos 20°$	$-F_2 \sin 20°$ $= 60 \sin 20°$
$\boldsymbol{F_3}$	$+ F_3 \cos 50°$ $= 40 \cos 50°$ $= + 25.71$ N	$+F_3 \sin 50°$ $= 40 \sin 50°$ $= + 30.64$ N
$\boldsymbol{F_4}$	$+F_4$ $= + 10$ N	0 N
Force résultante	+ 15.19 N	- 40.74 N

La force résultante peut donc être représentée par un triangle rectangle dont la base est 15.19 N et la hauteur 40.74 N (vers le bas, le triangle est renversé). En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\left|F_{\text{résultante}}\right| = \sqrt{(15.19N)^2 + (-40.74N)^2} = 43.48\ \text{N}$$

Et l'angle est donné par :

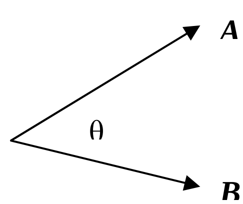
$$\tan\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{40.74\ \text{N}}{15.19\ \text{N}}$$

$$\theta = 69.5^\circ$$

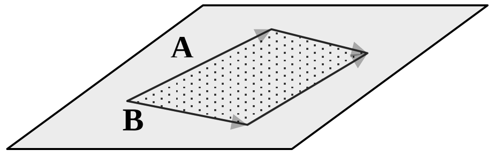
<u>10. Produit scalaire</u>

Le *produit scalaire* de deux vecteurs ***A*** et ***B*** donne un scalaire; il n'a pas de direction et on le représente par un point entre les deux vecteurs : $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

Considérons deux vecteurs ***A*** et ***B*** ayant un angle θ entre eux :



On définit le produit scalaire comme étant l'aire incluse dans le polygone créé par les vecteurs A et B. Puisque le résultat est une surface, le résultat n'est donc pas un vecteur.

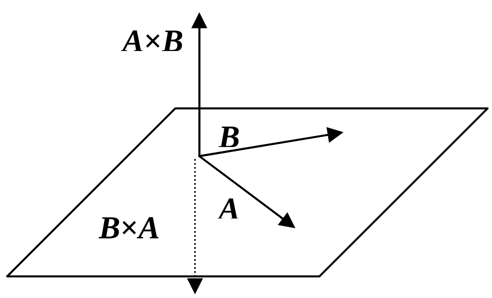


Ce produit peut être calculé avec l'équation :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta$$

11. Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* est un produit de deux vecteurs qui résulte en un vecteur. Il est représenté par les symboles × ou ^. Le résultat du produit vectoriel a donc une direction, donnée par le vecteur perpendiculaire (c.-à-d. orthogonal) au plan créé par les deux vecteurs multipliés :



L'équation pour le produit vectoriel est :

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin\theta \quad \hat{u}$$

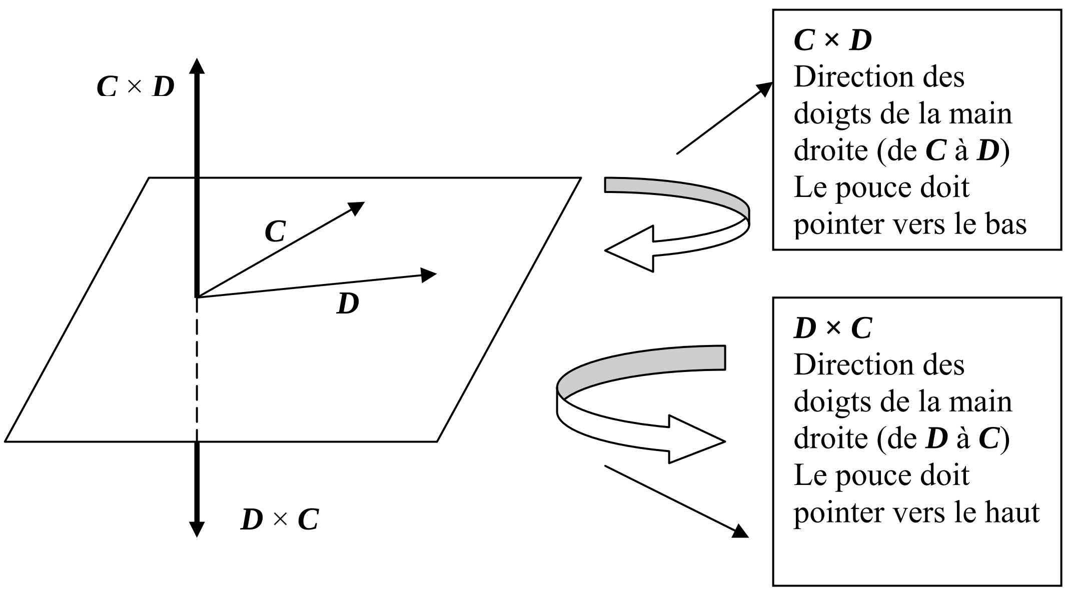
où *û* est un vecteur de longueur égale à 1, utilisé pour indiquer la direction du vecteur résultant. En pratique, on utilise la règle de la main droite pour déterminer la direction *û* (voir la prochaine section pour la règle de la main droite)

Règle de la main droite (en anglais, *right-hand rule* ou *rhr*)

En physique, la règle de la main droite est très utile. On s'en sert pour le phénomène de courant et champ magnétique dans un fil ou un solénoïde. Cette règle est aussi utile dans d'autres disciplines comme la géologie ou les mathématiques.

Attention! Assurez-vous de bien utiliser votre main droite, pas la gauche!

Exemple : le produit vectoriel des vecteurs ***C*** et ***D***



Exemple : la direction du champ magnétique dans un solénoïde