

Règles de dérivées.

**Définition:**

$$f'(x)|_{x=a} \text{ ou } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

*Motivation:* La vitesse instantanée est le rapport de la distance (très petite) parcourue au court intervalle de temps, i.e.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

*Exemple:*

$$\begin{aligned} (x^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x \\ &= 2x \end{aligned}$$

**Constante:**

$$k' = 0$$

*Exemple:*

$$5' = 0$$

**Puissance:**

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

*Exemple:*

$$(x^2)' = 2x$$

**Produit par une constante:**

$$(ku)' = k(u')$$

où  $u = f(x)$ , une fonction quelconque de  $x$ .

*Exemple:*

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$$

**Somme de fonctions:**

$$(u + v)' = u' + v'$$

où  $u = f(x)$  et  $v = g(x)$ .

*Exemple:*

$$(5x^2 + x^3)' = (5x^2)' + (x^3)' = 10x + 3x^2$$

**Produit de fonctions:**

$$(uv)' = u'v + uv'$$

*Exemple:*

$$((5x^2 + x^3) \cdot (3x^4 + 5))' = (10x + 3x^2) \cdot (3x^4 + 5) + (5x^2 + x^3) \cdot 12x^3$$

**Quotient de fonctions:**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

*Exemple:*

$$\left(\frac{5x^2 + x^3}{x^5}\right)' = \frac{(10x + 3x^2) \cdot x^5 + (5x^2 + x^3) \cdot 5x^4}{x^{10}}$$

**Dérivée en chaîne:** Si  $y = f(u)$  et  $u = g(x)$ , alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

*Exemple:* Si  $y = u^3$  et  $u = 2x^2 + 3$ , alors

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2)(4x) = 3(2x^2 + 3)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 + 3)^2$$

**Exposant généralisé:**

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

*Exemple:*

$$((3x^7 + 5x^3 + 11)^4)' = 4(3x^7 + 5x^3 + 11)^3(21x^6 + 15x^2)$$