

Examen partiel I, le vendredi 11 octobre, de 8h30 à 9h30.

Matériel permis: calculatrice et formulaire (distribué).

Vous pouvez obtenir un maximum de 15 points sur les 19 points disponibles.

Question 1. (2.5 points) Nombres complexes. Écrire sous la forme $a + ib$: (a) $3e^{i\pi}$, (b) $e^{3i\pi/4}$, (c) $-2e^{5i}$.

Question 2. (4.0 points) Système masse-ressort. La position d'un bloc attaché à un ressort est donnée par $x = 0.2 \sin(12t + 0.2)$ m. Trouvez (a) l'accélération quand $x = 0.08$ m; (b) le premier instant positif auquel $x = +0.1$ m avec v négatif. (Remarque : $\sin \pi/6 = 1/2$)

Question 3. (4.5 points) Énergie dans un mouvement harmonique simple. La position d'un bloc de 60 g attaché à un ressort horizontal est $x = 0.24 \sin(12t)$ m. (a) Quelle est la vitesse lorsque $x = 0.082$ m? (b) Quelle est la position lorsque $v = +1.5$ m/s? (c) Quelle est l'énergie mécanique totale du système?

Question 4. (4.5 points) Oscillations amorties. Un bloc de 100 g est attaché à un ressort de constante $k = 15$ N/m. La pulsation amortie ω' vaut 0.99 fois la pulsation propre ω_0 . (a) Quelle est la constante d'amortissement γ ? (b) Comment varie l'amplitude en fonction du temps, sachant qu'à $t = 0$ s elle valait A_0 ?

Question 5. (3.5 points) Pendules. Une tige uniforme de masse M et de longueur $L = 1.2$ m oscille autour d'un axe horizontal passant par une extrémité. Quelle est la longueur d'un pendule simple ayant la même période? (Pour la tige, $I = ML^2/3$.)

15 pts à accumuler sur un total de

$$pe^{i\theta} = p \cos \theta + i p \sin \theta$$

#1 (a) $3e^{i\pi} = 3 \cos \pi + i 3 \sin \pi = \boxed{-3}$

2.5

(b) $e^{3i\pi/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

$$= \boxed{-0.707 + i 0.707}$$

(c) $-2e^{5i} = -2 \cos 5 + i (-2) \sin 5 = \boxed{-0.567 + i 1.92}$

#2. $x = 0.2 \sin(12t + 0.2) \text{ m}$ [t en secondes]

4.0

(a) $a = -\omega^2 x = -12^2 (0.08) = \boxed{-11.5 \text{ m/s}^2}$

(b) $0.1 = 0.2 \sin(\theta(t))$ avec $\theta(t) = 12t + 0.2$
 $\sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

mais $v = 0.2(12) \cos(12t + 0.2) = 2.4 \cos \theta$

si $v < 0$ alors on garde $\theta = \frac{5\pi}{6} = 12t + 0.2$

d'où $t = \frac{1}{12} \left(\frac{5\pi}{6} - 0.2 \right)$

$$t = \boxed{0.201 \text{ s}}$$

#3. $x = 0,24 \sin 12t$ m donc $A = 0,24$ m et $\omega = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 masse $m = 0,06$ kg

4.5
 (a) $\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2$ *

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m} (A^2 - x^2) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 12 \sqrt{0,24^2 - 0,08^2}$$

$$v = \pm 2,71 \text{ m/s} *$$

(b) $\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} mv^2$

$$x^2 = A^2 - \frac{mv^2}{k} = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}$$

$$x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} = \pm \sqrt{0,24^2 - \frac{1,5^2}{12^2}}$$

$$x = \pm 0,205 \text{ m} *$$

(c) $E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} (0,06) (12)^2 (0,24)^2$

$$E = 0,249 \text{ J} *$$

#4. masse $m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$

$$k = 15 \text{ N/m}$$

$$\omega = 0.99\omega_0$$

4.5

$$(a) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2$$

$$\frac{\gamma^2}{4m^2} = \omega_0^2 - \omega^2 = \omega_0^2 (1 - 0.99^2)$$

$$\gamma = 2m\omega_0 \sqrt{1 - 0.99^2} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (\omega_0 = 12.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}})$$

$$= 2m \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - 0.99^2}$$

$$= 2 \sqrt{km} (1 - 0.99^2) = 2 \sqrt{(15)(0.1) (1 - 0.99^2)}$$

$$\gamma = 0.345 \text{ kg/s}$$

$$(b) \quad A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$$

$$\frac{\gamma}{2m} = \frac{0.345}{2(0.1)} = 1.73 \frac{1}{\text{s}}$$

$$A(t) = A_0 e^{-1.73t}$$

#5, Tige: masse M , longueur $L = 1.2\text{ m}$
Pendule simple: longueur l

3.5

Tige: $\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$d = \frac{L}{2}$

$\frac{1}{3} ML^2 = 0.48M$

Pendule simple: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

même période, donc même ω^2 :

$$\frac{g}{l} = \frac{mgd}{I} = \frac{mg(\frac{L}{2})}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$l = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(1.2) = 0.800\text{ m ou } 80.0\text{ cm}$$