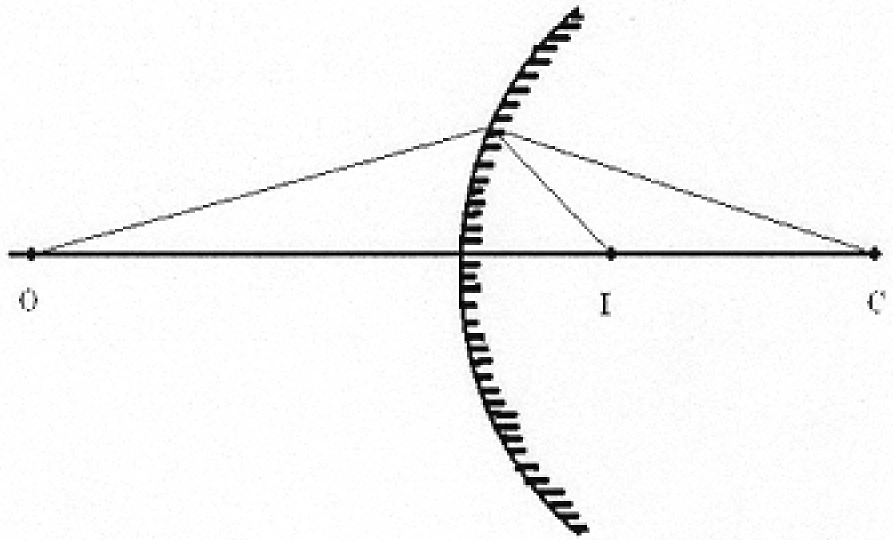
PHYSQ 130 LEC A1: Ondes, optique et son automne 2004

Professeur : Marc de Montigny
Examen final : mardi 14 décembre, de 9 h à midi
Matériel : aide-mémoire (distribué), calculatrice et cahier d'examen (fourni)
Remarque : Vous pouvez accumuler un maximum de 45 points sur les 50 points disponibles.

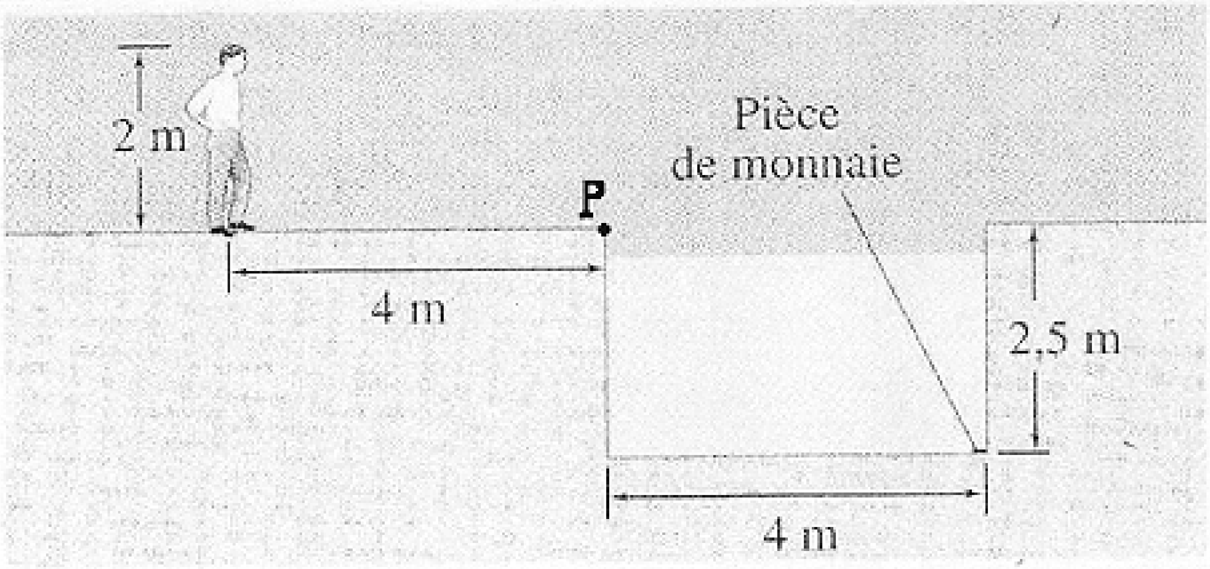
Question 1. [Maximum de 5.5 points] **Miroirs sphériques.**

En vous aidant de l'illustration ci-dessous, obtenez la relation entre la distance p (de l'objet O au miroir), la distance q (de l'image I aù miroir), et la distance focale ($f = \frac{1}{2}R$), pour un miroir convexe. Tel que vu dans le cours, cette preuve consiste premièrement à établir une relation entre les trois angles formés par l'axe principal et les droites qui partent respectivement de O, I, et du centre de courbure C. Utilisez le fait que ces angles soient assez petits pour considérer $\tan\theta \approx \theta$.



Question 2. [Maximum de 4.0 points] **Réfraction.**

Une personne dont les yeux sont à 2 m du sol se tient debout à 4 m du bord d'une piscine profonde de 2.5 m et longue de 4 m (figure ci-dessous). Une pièce de monnaie repose au fond de l'eau, du côté opposé. Jusqu'à quelle hauteur la piscine doit-elle être remplie pour que la personne puisse voir la pièce? Un rayon lumineux issu de la pièce et réfracté à la surface de l'eau doit atteindre l'oeil de l'observateur en frôlant le bord de la piscine (point P) au passage. Prenez $n_{\text{eau}} = 1.33$ et $n_{\text{air}} = 1.00$.



Question 3. [Maximum de 6.0 points] Dioptres sphériques.

Trouvez la position de l'image d'un petit objet produite par une sphère en verre ($n_{\text{verre}} = 1.5$) de rayon 4 cm, sachant que l'objet est situé dans l'air, et (a) à l'infini; (b) à 20 cm du centre de la sphère. Exprimez votre réponse par rapport au centre de la sphère. Chaque côté de la sphère agit tour à tour comme un dioptre sphérique. Prenez $n_{\text{air}} = 1.0$.

Question 4. [Maximum de 3.5 points] Formule des opticiens.

Une lentille mince en verre ($n_{\text{verre}} = 1.5$) a une surface convexe de rayon de courbure égal à 12 cm. Elle est entourée d'air ($n_{\text{air}} = 1$). Quel doit être le rayon de l'autre surface pour que la distance focale soit : (a) de +16 cm; (b) de −40 cm? Dans chaque cas, dessinez la lentille résultante en indiquant les rayons de courbure.

Question 5. [Maximum de 3.5 points] Combinaison de lentilles minces.

Un objet est situé à 60 cm devant une lentille divergente dont le foyer se trouve à 15 cm. À 10 cm derrière cette lentille se trouve une lentille convergente avec son foyer à 20 cm. Calculez : (a) la position de l'image finale par rapport à la lentille divergente; (b) le grossissement total; (c) L'image finale est-elle droite ou renversée?

Question 6. [Maximum de 3.5 points] Lentilles correctrices.

Une personne a besoin d'une lentille de contact de +1.5 D pour pouvoir lire son journal à 25 cm. Quelques années plus tard, avec les mêmes verres, elle doit tenir son journal à 40 cm. Quelle force (en dioptries, D) de verres de contact doit-on prescrire à cette personne pour qu'elle puisse lire à 25 cm de nouveau?

Question 7. [Maximum de 5.5 points] Interférence de Young.

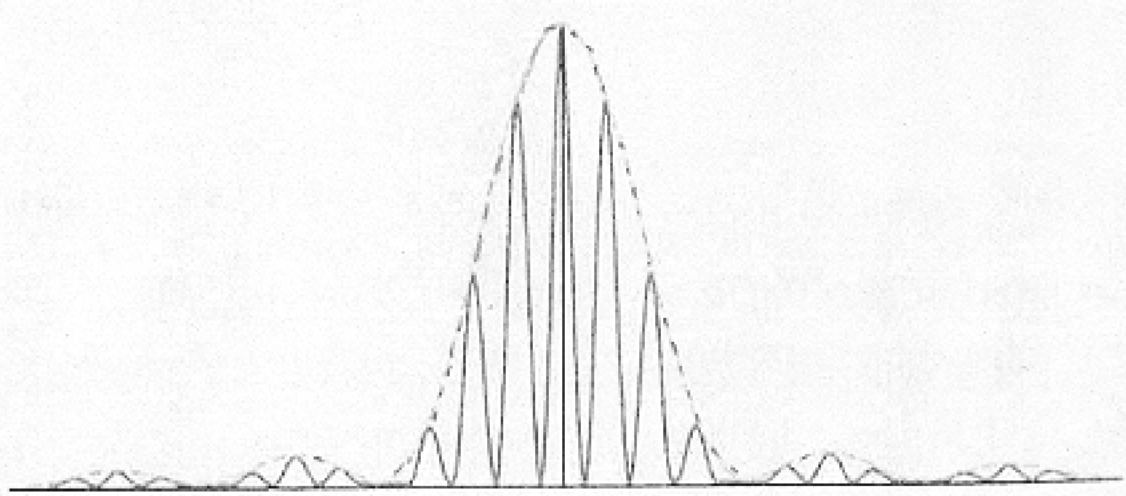
Dans l'expérience à deux fentes de Young, on projette de la lumière de longueur d'onde 630 nm sur deux fentes minces séparées de 0.5 mm, et une figure d'interférence est formée sur un écran se trouvant à 5 m plus loin. Trouvez les trois positions les plus proches du centre auxquelles l'intensité lumineuse vaut 25% de l'intensité maximale. Utilisez l'approximation $\sin\theta \approx \tan\theta$.

Question 8. [Maximum de 3.5 points] Pellicules minces.

Une pellicule de verre ($n_{\text{verre}} = 1.52$) d'épaisseur 420 nm est éclairée par de la lumière blanche à incidence normale. Pour quelles longueurs d'onde, dans le domaine du visible (c.-à-d. $380 \leq \lambda \leq 740$ nm), aura-t-on de l'interférence constructive, si la pellicule est entourée d'air ($n_{\text{air}} = 1$)?

Question 9. [Maximum de 3.5 points] Interférence et diffraction.

Considérez la figure ci-dessous, qui combine diffraction et interférence de Young. (a) Quels ordres m d'interférence sont absents à cause de la diffraction? (b) Sachant que si vous éclairez les fentes avec de la lumière de longueur d'onde 580 nm, vous obtenez le premier ordre (c.-à-d. $m = 1$) d'interférence à 0.4°, quelle est la distance entre les fentes? (c) Quelle est la largeur de chaque fente?



Question 10. [Maximum de 5.5 points] Diffraction par une fente.

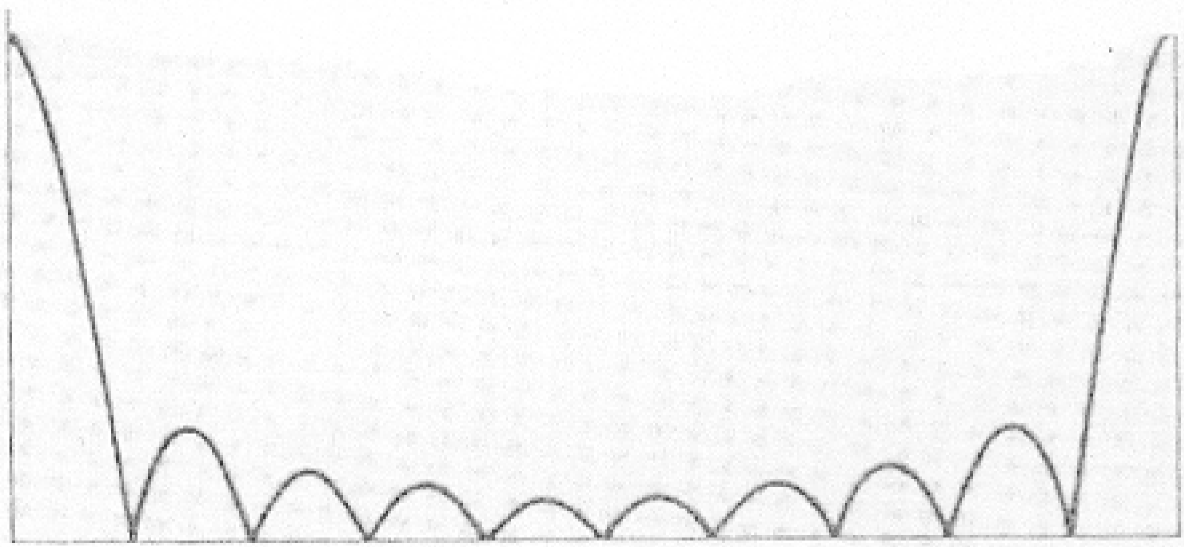
De la lumière de longueur d'onde $\lambda = 650$ nm tombe sur une fente de largeur égale à 0.12 mm. Sur un écran situé à 6 m de la fente : (a) à quelle distance du maximum central le premier minimum se trouve-t-il? (b) À quelle distance se trouve le premier point où l'intensité vaut 50% de l'intensité maximale? (*Indice* : Vous aurez besoin de la méthode de Newton-Raphson, avec $x_1 = 1$ ou 2.)

Question 11. [Maximum de 3.5 points] Ouverture circulaire et critère de Rayleigh.

Supposez que pour éliminer les distortions atmosphériques, on place sur la Lune un télescope dont l'ouverture circulaire a un rayon de 2.5 m. Si on l'utilise pour observer la surface de Mars, qui se trouve à 8×10^7 km, quelle est la distance minimale nécessaire entre deux objets à la surface de Mars pour que le télescope puisse les distinguer, si la longueur d'onde est de 500 nm? Effectuez un calcul exact, puis comparez avec le résultat obtenu en utilisant l'approximation $\sin\theta \approx \tan\theta$.

Question 12. [Maximum de 2.5 points] Réseau de diffraction.

Ci-dessous se trouve la figure de diffraction produite en éclairant une diapositive contenant N fentes. Que vaut N? Expliquez.



BONNES VACANCES!

PHYSQ 130: Ondes, optique et son.

Aide-mémoire pour l'examen du 14 décembre 2004.

$$\theta_i = \theta_r \qquad n = \frac{c}{v} \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad r^2 \approx 2Re$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} \qquad n_i \sin\theta_c = n_a$$

$$f = \frac{R}{2} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad m = \frac{y_I}{y_O} = -\frac{q}{p} \qquad P = \frac{1}{f}$$

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

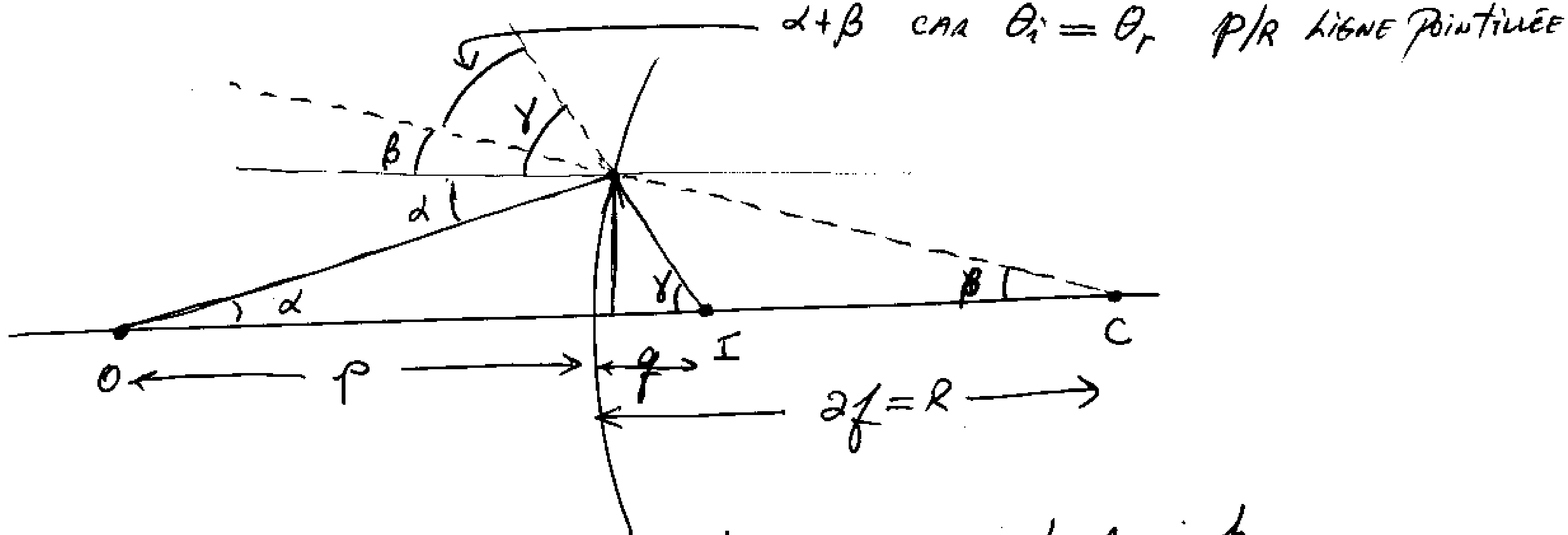
$$\delta = m\lambda \qquad \delta = (m + \frac{1}{2})\lambda \qquad \delta \approx d\sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{L}$$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T} \qquad I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad \alpha = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda} \qquad I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\delta = 2e \qquad a\sin\theta = m\lambda \qquad a\sin\theta = 1.22\lambda \qquad \theta_c \approx \frac{1.22\lambda}{a}$$

$$\phi = 2m\pi \qquad \phi = \frac{2p\pi}{N} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Miroirs sphériques.



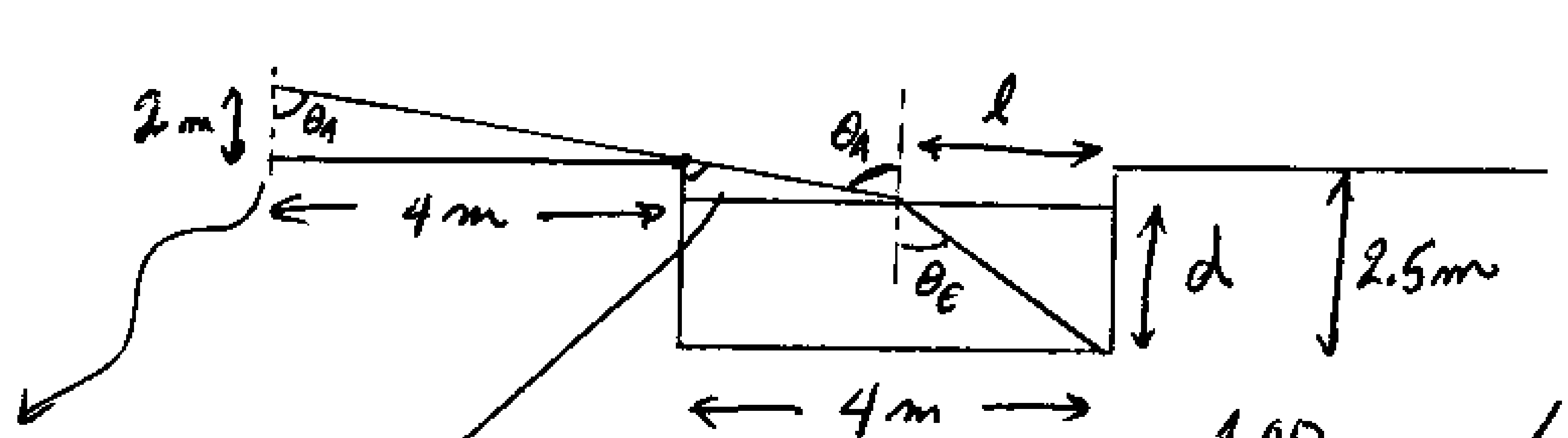
$\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{h}{p}$, $\gamma \approx \tan\gamma = \dfrac{h}{q}$, $\beta \approx \tan\beta = \dfrac{h}{2f}$

du segment supérieur gauche, on trouve $\gamma = \beta + (\alpha + \beta)$

d'où $\gamma = \alpha + 2\beta$

$$\frac{h}{q} = \frac{h}{p} + 2\left(\frac{h}{2f}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{f}}$$

#2, REFRACTION



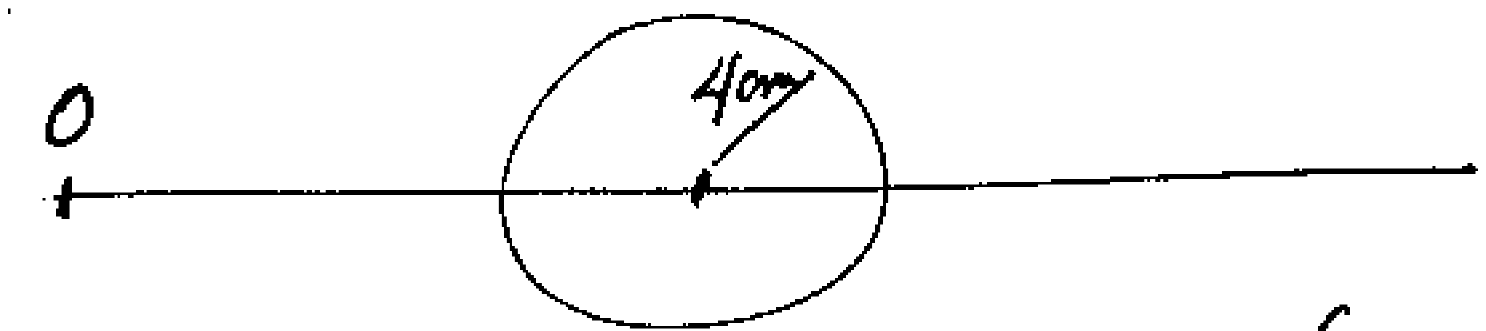
$$\tan\theta_A = \frac{4}{2} \Rightarrow \theta_A = 63.43494882^\circ \; ; \quad \underset{1.00}{n_A} \sin\theta_A = \underset{1.33}{n_E} \sin\theta_E \; : \theta_E \doteq 42.260438^\circ$$

$$\tan\theta_A = 2 \doteq \frac{4-l}{2.5-d} \; : \quad 4-l = 2(2.5-d) \qquad 2d-l = 1$$

$$\tan\theta_E = \frac{l}{d} \qquad l = d\tan(42.260438^\circ)$$

$$d = \frac{1}{2-\tan(42.26\ldots)} \doteq 91.6 \text{ cm}$$

#3. Dioptres sphériques.



On trouve d'abord l'image de la première surface (convexe), puis l'image de la seconde surface (concave).

(a) $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$. $p_1 = \infty$, $R = 4$ ← dioptre convexe; $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1.5}{q_1} = \frac{1.5-1}{4}$; $q_1 = 1.5(8) = 12\text{ cm}$

q_1 est donc à 4 cm à droite du second dioptre i.e. $p_2 = -4\text{ cm}$

Comme ça va du verre à l'air $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$ et $R = -4$ (dioptre concave)

$\frac{1.5}{-4} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-1.5}{-4}$; $\frac{1}{q_2} = \frac{0.5}{4} + \frac{1.5}{4}$ $q_2 = 2$: $\boxed{\text{à 6cm à droite du centre}}$

(b) Semblable à la partie (a) $p_1 = +16$ $(= 20 - 4)$

$\frac{1}{16} + \frac{1.5}{q_1} = \frac{1.5-1}{4} = \frac{1}{8}$; $\frac{1.5}{q_1} = \frac{1}{16}$ $q_1 = 24\text{cm} \rightarrow p_2 = -(24 - 2(4)) = -16\text{ cm}$

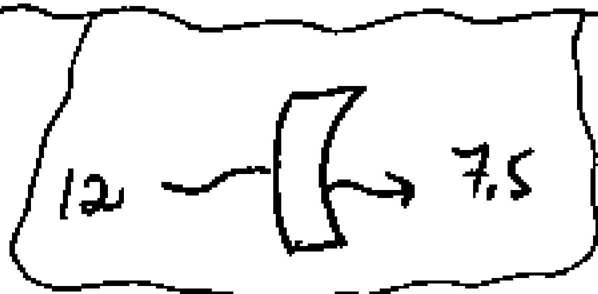
$\frac{1.5}{-16} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-1.5}{-4}$; $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{8} + \frac{1.5}{16}$ $q_2 = 4.57$: $\boxed{\text{à 8.57 cm à droite du centre}}$

#4. FORMULE DES OPTICIENS.

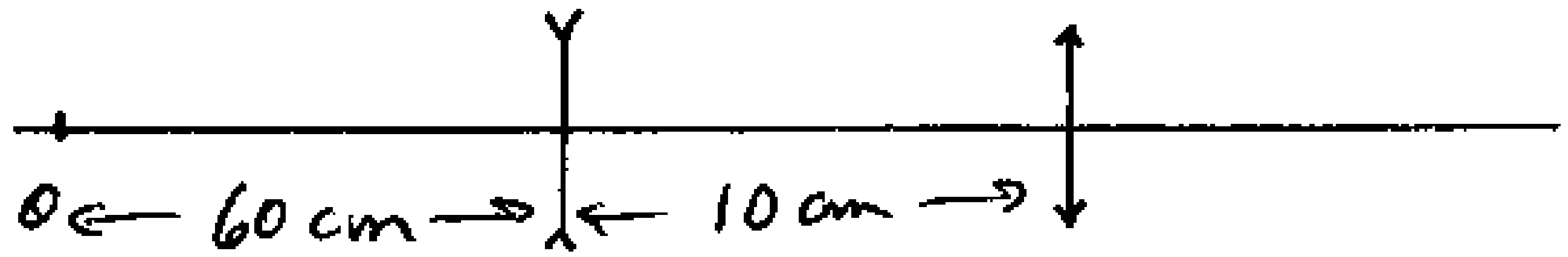
$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

(a) $\frac{1}{16} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{R_2}\right)$; $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{0{,}5(16)} \Rightarrow \boxed{R_2 = -24\ \text{cm}}$

(b) $\frac{1}{-40} =$ " " ; $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{0{,}5(40)} \Rightarrow \boxed{R_2 = 7{,}5\ \text{cm}}$



#5 COMBINAISON DE LENTILLES :



$f_1 = -15\,cm \quad ; \quad f_2 = +20$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \qquad q_1 = \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-15} - \frac{1}{60}\right)^{-1} \doteq -12\,cm$$

devant

$p_2 \doteq 22\,cm$

$$m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{(-12)}{60} \doteq 0.2$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} : \qquad q_2 = \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{22}\right)^{-1} \doteq +220\,cm$$

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{220}{22} = -10 \qquad m_{total} \doteq m_1 m_2 = -2$$

Réponses : à 230 cm à droite de la lentille divergente

$m_{tot} = -2$ i.e. image plus grande et renversée

#6. Lentilles correctrices.

Le nouveau point proche est donné par q lorsque $p \doteq 40\text{ cm} = 0{,}40\text{ m}$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \; ; \quad \underbrace{\frac{1}{0{,}40}}_{2.5} + \frac{1}{q} \doteq 1{,}5 \qquad q_{pp} = -1\text{ m}$$

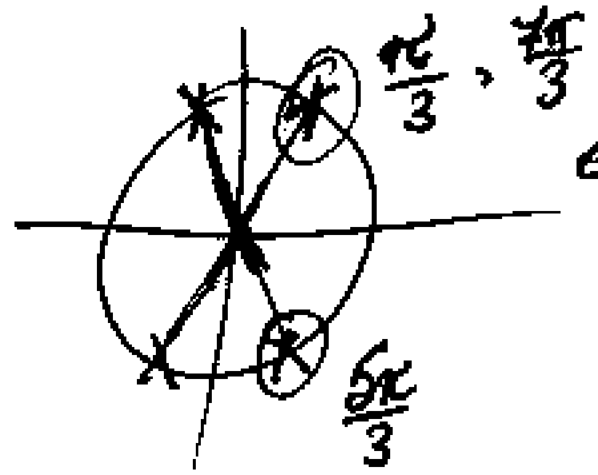
On veut l'objet à $p = 25\text{ cm} \doteq 0{,}25\text{ m}$ pour $q = q_{pp} \doteq -1\text{ m}$

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underbrace{\frac{1}{0{,}25}}_{4} - 1 \doteq \boxed{+3\text{ D}}$$

#7. INTERFÉRENCE

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \; ; \quad \frac{\phi}{2\pi} = \frac{d\sin\theta}{\lambda} = \frac{dy}{\lambda L} \; ; \quad \frac{\phi}{2} = \frac{\pi d y}{\lambda L}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda L}\right) = \frac{I}{4I_0} = 0.25 = \frac{1}{4} \; ; \quad \cos\left(\frac{\pi d y}{\lambda L}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$ (d'un côté)



On ne garde que les deux points marqués ⊗

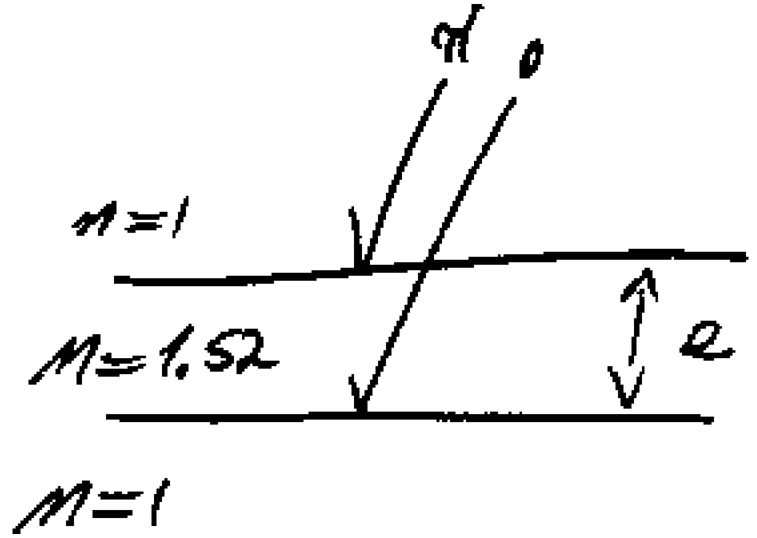
$$\frac{\pi d y}{\lambda L} = \frac{\pi}{3} + 2m\pi \text{ et } \frac{-\pi}{3} + 2n\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 4\pi, \text{ etc}$$

$$= \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} + 2\pi,\ \text{etc.}$$

$$y = \frac{\lambda L}{d} \times \frac{\text{angle}}{\pi}, \quad \text{où angle} = \frac{\pi}{3},\ \underbrace{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}_{5\pi/3},\ \underbrace{\frac{\pi}{3} + 2\pi}_{7\pi/3}$$

$$= \underbrace{\frac{(6{,}3\times10^{-7}\,m)(5\,m)}{5\times10^{-4}}}_{0{,}63\ cm} \times \frac{\text{angles}}{\pi} = \boxed{0{,}21\,cm,\ 1{,}05\,cm,\ 1{,}47\,cm}$$

8. COUCHE MINCE :



$e = 0{,}42\,\mu m = 4{,}2 \times 10^{-7}\,m$

MAX à $2e = (m + 1/2)\,\lambda_n$ où $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ $n = 1{,}52$

donc $\lambda = \frac{2ne}{m + 1/2} = \frac{2(1{,}52)(4{,}2 \times 10^{-7}\,m)}{m + 1/2} = \frac{12{,}8 \times 10^{-7}\,m \text{ ou } 1280\,mm}{m + 1/2}$

m :	0	1	$\boxed{2}$	3
λ :	2560	853	$\boxed{512}$	366

$\boxed{\text{Réponse : } 512\,nm}$

#9. Interférence et diffraction :

(a) De la figure, $m=4$ est à même θ que $M=1$.

$d\sin\theta = m\lambda$, $a\sin\theta = M\lambda$: $a\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = M\lambda$; $\frac{a}{d}\times 4 = 1$; $a = d/4$

$m\lambda = d\sin\theta = (4a)\sin\theta = 4M\lambda \Rightarrow m = 4M = \boxed{\text{multiples de } 4}$

(b) $d = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{(1)(5{,}8\times10^{-7})}{\sin(0{,}4^\circ)} = \boxed{8{,}31\times10^{-5}\ m}$

(c) $a = \frac{d}{4} = \boxed{2{,}08\times10^{-5}\ m}$

#10. DIFFRACTION

(a) $a \sin\theta = m\lambda$: $\sin\theta \approx \frac{y}{L}$ $\qquad y \simeq \frac{m\lambda L}{a} = \frac{(1)(6{,}5\times10^{-7}\,m)(6\,m)}{1{,}2\times10^{-4}\,m}$

$= \boxed{3{,}25\ cm}$

(b) $\frac{I}{I_0} = 0{,}5 = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$ où $\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta$

$\sin\frac{\alpha}{2} - \sqrt{0{,}5}\,\frac{\alpha}{2} = 0$ à $\frac{\alpha}{2} = ?$

Newton-Raphson : $f(x) = 0$ avec $\sin x - \sqrt{0{,}5}\,x = 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - \sqrt{0{,}5}\,x_n}{\cos x_n - \sqrt{0{,}5}}$ avec $x_1 = 1$ ou 2 donne $x = \frac{\alpha}{2} \simeq 1{,}391557378$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \simeq \frac{\pi a y}{\lambda L}$ $\qquad y = \left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\lambda L}{\pi a}$

$y = (1{,}391557378)\frac{(6{,}5\times10^{-7}\,m)(6\,m)}{\pi\,(1{,}2\times10^{-4}\,m)} = \boxed{1{,}44\ cm}$

#11. Critère de Rayleigh

(a) $a \sin\theta_c = 1.22\lambda$ $\quad \tan\theta_c = \frac{y}{L}$ $\quad y = L \tan\left(\arcsin \frac{1.22\lambda}{a}\right)$

$a = 2 \times 2.5\,m$

$$y = (8 \times 10^7\,km) \tan\left(\arcsin \frac{1.22(5 \times 10^{-7}\,m)}{5\,m}\right)$$

$$= \boxed{9.76\,km}$$

(b) approximation des petits angles $\quad \sin\theta_c \approx \tan\theta_c$

$$a\frac{y}{L} \simeq 1.22\lambda \qquad y \simeq \frac{1.22\lambda L}{a} = \boxed{9.76\,km}$$

#12. Réseau de diffraction

Max principaux à $\phi = 2m\pi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

minima à $\phi = \frac{2p\pi}{N}$ $p = 1, 2, 3, \dots$ mais $p \neq 0, N, 2N, 3N, \dots$

il a 9 minima i.e $p = 1, \dots, 9$ et $p = \underline{10 = N}$ est un max.

il y a donc <u>10 fentes</u>.