PHYSQ 130: Ondes, optique et son **automne 2004**

Examen partiel I, le vendredi 15 octobre, de 8h30 à 9h30.
Matériel permis: aide-mémoire (distribué), calculatrice et feuilles.
Vous pouvez obtenir un maximum de 15 points sur les 22 points disponibles.

Question 1. [Maximum de 3.5 points] Nombres complexes.
Écrire sous la forme $a + ib$:
(a) $(1 - \mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})$, (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3\ e^{2\mathrm{i}t})$, (c) $(2\ e^{-5\mathrm{i}t})(3\ e^{6\mathrm{i}t})$.

Question 2. [Maximum de 5.0 points] Système masse-ressort.
Un bloc de masse égale à 50 grammes est attaché à un ressort dont la constante de rappel vaut $k = 20$ N/m. À $t = 0$ s, on le lâche d'une distance de 5 cm hors de sa position d'équilibre. (a) Écrivez sa position en fonction du temps, sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t)$. (b) Quelle est la vitesse maximale du bloc? (c) Trouvez une expression pour tous les temps $t > 0$ pour lesquels $x(t) = 3$ cm et $v(t) = 80$ cm/s. Votre réponse devrait dépendre de n, où n prend n'importe quelle valeur entière.

Question 3. [Maximum de 4.5 points] Énergie dans un mouvement harmonique simple.
L'énergie mécanique totale d'un système masse-ressort est de 0.18 J. De plus, sachant que son amplitude vaut 14 cm et que le module de la vitesse maximale est 1.25 m/s, calculez : (a) la masse du bloc; (b) la constante de rappel du ressort; (c) la fréquence angulaire ω, et (d) les positions x du bloc lorsque sa vitesse est de 7 cm/s.

Question 4. [Maximum de 5.5 points] Oscillations forcées.
Un bloc de 100 grammes est attaché à un ressort dont la constante vaut $k = 10$ N/m. Le système est dans un milieu résistif, et il est entretenu par une *force externe* $F_e(t)$. Le mouvement est décrit par la relation :

$$x(t) = 25\ \sin(8t + 0.1)\ \text{cm},$$

où t est en secondes. Calculez : (a) la constante d'amortissement γ, en kg/s, et (b) la grandeur de la force externe F_e. (c) Si ce système est soumis à une force externe pour laquelle $\omega_e = 5$ rad/s, que devient l'amplitude $A(\omega_e)$, si tous les autres paramètres sont les mêmes que dans les parties (a) et (b)?
[Suite à la page suivante...]

Question 5. [Maximum de 3.5 points] Ondes progressives.

Une onde progressive est décrite par l'équation :

$$y(x,t) = 0.32\ \sin(0.4\pi\ x + 1.2\pi\ t)\ \mathrm{m}.$$

(a) Cette onde se déplace-t-elle vers la gauche ou vers la droite?
Calculez : (b) sa longueur d'onde λ; (c) sa fréquence f; (d) sa vitesse, et (e) son amplitude?

PHYSQ 130 FORMULAIRE TEST I

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A \sin B \;;\; \cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A \sin B$$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots+\frac{1}{n!}x^n+\dots \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+-\dots \;;\; \cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+-\dots$$

x EN RADIANS.

$$\ddot{x}+\omega^2 x = 0 \qquad a = -\omega^2 x$$

$$x = A\cos(\omega t+\phi), \quad v = -\underbrace{\omega A}_{v_{max}}\sin(\omega t+\phi), \quad a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T} \qquad E = \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{MAX}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \text{ ou } \sqrt{g/l} \text{ ou } \sqrt{\frac{mgd}{I}} \text{ ou } \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \;;\; v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = -kx \qquad U_r = \frac{1}{2}kx^2 \qquad U_g = mgh$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}} \qquad \vec{f} = -\gamma\vec{v}, \qquad v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$x = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin(\omega' t+\phi) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx = F_e\cos\omega_e t \rightarrow x = A\sin(\omega_e t+\delta)$$

$$A = \frac{F_e/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2+\left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)^2}}, \qquad \tan\delta = \frac{\omega_0^2-\omega_e^2}{\gamma\omega_e/m}$$

#1

(a) $(1-i)(2+3i) = 2+3i-2i-i(3i) = 2+(3-2)i+3 = 5+i$

(b) $\frac{d}{dt}\left(3e^{2it}\right) = 6ie^{2it} = 6i\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right) = -6\sin(2t)+6i\cos(2t)$

(c) $\left(2e^{-5it}\right)\left(3e^{6it}\right) = 6e^{it} = 6\cos t + i6\sin t$

#2 (a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0.05}} = 20\,\frac{rad}{s}$, $A = 0.05\,m$; $x(t) = 0.05\cos(20t)\,m$

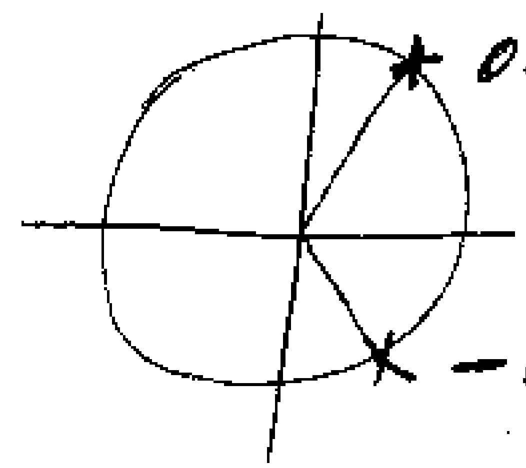
(b) $v(t) = -20(0.05)\sin(20t) = -\sin(20t)$; $v_{max} = 1\,m/s$
(coefficient de sin)

(c) $t > 0$ pour lesquels $x = 3\,cm$ et $v = 80\,\frac{cm}{s} = 0.8\,\frac{m}{s}$

$x(t) = 0.03 = 0.05\cos(20t)$ $\quad \cos(20t) = \frac{0.03}{0.05} = 0.6 \rightarrow 20t = \arccos 0.6$
$= 0.927295218$

$v(t) = 0.8 = -\sin(20t)$ $\quad \sin(20t) = -0.8$

mais $\sin(0.927\ldots) = +0.8$



$-0.927\ldots$ à choisir, car cos + ~~et~~ sin − .
$+2n\pi$

$20t = 2n\pi - 0.927295218$

$t = \frac{2n\pi - 0.927295218}{20}$ $\quad (n \geq 1)$

#3

(a) $E_{tot} = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m v_{max}^2$ $\quad m = \frac{2E_{tot}}{v_{max}^2} = \frac{2(0.18)}{(1.25)^2} = 0{,}23\,kg$

(b) $k = \frac{2E_{tot}}{A^2} = \frac{2(0.18)}{(0.14)^2} = 18.4\ N/m$

(c) $\omega A = v_{max} = 1.25\ m/s$ $\quad \omega = \frac{1.25}{0.14} = 8.93\ \frac{Rad}{s}$

(d) $E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ $\quad \frac{1}{2} k x^2 = E_{tot} - \frac{1}{2} m v^2$ $\quad x$ à $v = 7\frac{cm}{s}$

$$x^2 = \frac{1}{k}\left(2E_{tot} - mv^2\right) = \frac{1}{18.4}\left(2(0.18) - (0.23)(0.07)^2\right) = 0.019503967$$

$x \simeq \pm 14\ cm$

#4 OSCILLATEUR FORCÉ

$$x(t) = 25 \sin(\underbrace{8}_{\omega_e} t + \underbrace{0.1}_{\delta}) \text{ cm} \qquad [t \text{ en secondes}]$$

$$m = 100 g \,, \quad k = 10 \text{ N/m} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{10}{0.1} = 100 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

(a) $$\tan\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_e^2}{\gamma\omega_e/m} \qquad \gamma = \frac{m(\omega_0^2-\omega_e^2)}{\omega_e \tan\delta} = \frac{0.1\,(100-8^2)}{8 \tan 0.1}$$

$$\gamma = 4.485 \text{ kg/s}.$$

(b) $$F_e = mA\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)^2} = (0.1)(0.25)\sqrt{(100-64)^2 + \left(\frac{4.485\times 8}{0.1}\right)^2}$$

$$= 9.02 \text{ N}$$

(c) $$A = \frac{F_e/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)^2}} = \frac{9.02/0.1}{\sqrt{(100-25)^2 + \left(\frac{4.485\times 5}{0.1}\right)^2}}$$

$\omega_e = 5 \frac{\text{rad}}{s}$

$$= 0.381 \text{ m ou } 38.1 \text{ cm}$$

#5 $y(x,t) = 0{,}32 \sin(0.4\pi x + 1{,}2\pi t)$ m

(a) VERS LA GAUCHE

(b) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.4\pi} = 5$ m

(c) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1.2\pi}{2\pi} = 0.6$ Hz

(d) $v = \lambda f = (5)(0.6) = 3$ m/s

(E) amplitude $A = 0.32$ m ou 32 cm.