Faculté Saint-Jean **Hiver 2018**
Physique 131 - Mécanique **Examen partiel**
Examen consolidé avec EN PH 131 de la Faculty of Engineering

Nom	Réponses et solutions brèves
Numéro d'étudiant.e	______________________
Professeur	Marc de Montigny
Date	Lundi 26 février 2017, de 19h à 20h30 (7:00-8:30 pm)
Lieu	local 366

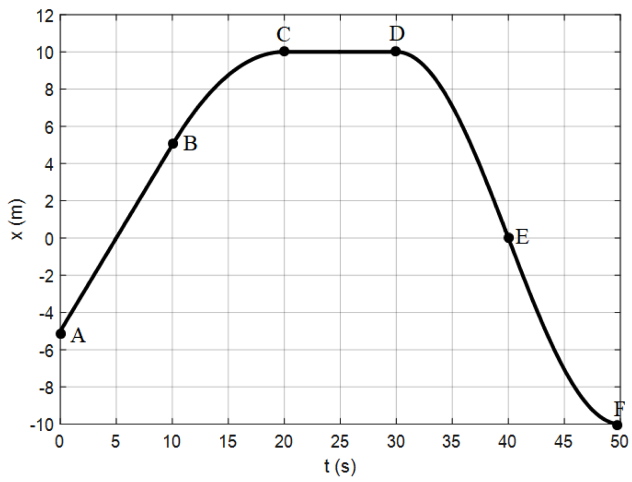
Instructions

- Ce cahier contient **13 pages**, incluant 2 pages vides pour vos calculs et 3 pages d'aide-mémoire. Écrivez vos réponses dans ce cahier.
- Indiquez clairement si vous utilisez le verso et s'il doit être corrigé.
- Examen à livre fermé. Les notes ou livres ne sont pas permis. Vous pouvez détacher l'aide-mémoire qui se trouve aux pages 11 à 13.
- Matériel permis: crayons, calculatrices non-programmables approuvées par la Faculty of Engineering.
- L'examen contient **7 problèmes**. Essayez toutes les parties de chaque problème.
- L'examen contient **50 points et vaut 25%** de la note finale du cours.
- Pour les questions 1 à 3, il n'est pas nécessaire de montrer les calculs et seules les réponses finales seront corrigées. Il n'y a donc pas de points partiels pour ces trois questions.
- Pour les questions 4 à 7, montrez votre travail de manière claire et logique. Encadrez vos réponses et utilisez les unités appropriées. Des points partiels seront possibles pour ces quatre questions.
- Sauf la calculatrice, tout autre appareil électronique ou moyen de communication est interdit. Mettez vos téléphones cellulaires hors circuit.
- Une copie en anglais de l'examen est disponible si vous voulez vérifier des questions.
- Vous ne pouvez pas quitter l'examen avant les premières 30 minutes.
- Ne parlez pas aux autres étudiants. Demandez vos questions au superviseur seulement.
- La valeur de chaque problème est indiquée ci-dessous:

question	valeur	note
1	3	
2	4	
3	5	
4	8	
5	8	
6	12	
7	10	
total	50	

Question 1. [3 points]

Le graphique ci-dessous montre la position d'une particule le long de l'axe x en fonction du temps. La courbe est droite entre A et B, et entre C et D. Le point E est un point d'inflexion. [Chaque question ci-dessous vaut 0.5 point, et toutes les bonnes réponses doivent être choisies pour recevoir 0.5 point, sans points partiels.]



(a) Encerclez le ou les intervalle(s) où la vitesse de la particule est positive

$\boxed{\text{(A, B)}}$ $\boxed{\text{(B, C)}}$ (C, D) (D, E) (E, F)

(b) Encerclez le ou les intervalle(s) où la vitesse de la particule est négative

(A, B) (B, C) (C, D) $\boxed{\text{(D, E)}}$ $\boxed{\text{(E, F)}}$

(c) Encerclez le ou les intervalle(s) où la vitesse de la particule vaut zéro

(A, B) (B, C) $\boxed{\text{(C, D)}}$ (D, E) (E, F)

(d) Encerclez le ou les intervalle(s) où l'accélération de la particule est positive

(A, B) (B, C) (C, D) (D, E) $\boxed{\text{(E, F)}}$

(e) Encerclez le ou les intervalle(s) où l'accélération de la particule est négative

(A, B) $\boxed{\text{(B, C)}}$ (C, D) $\boxed{\text{(D, E)}}$ (E, F)

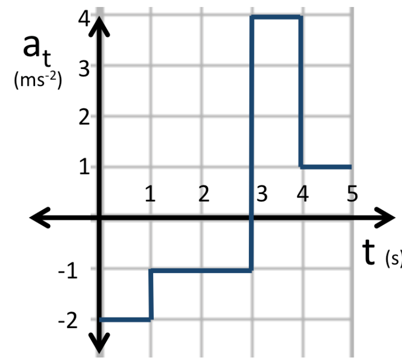
(f) Encerclez le ou les intervalle(s) où l'accélération de la particule vaut zéro

$\boxed{\text{(A, B)}}$ (B, C) $\boxed{\text{(C, D)}}$ (D, E) (E, F)

suite à la page suivante...

Question 2. [4 points]

On donne ci-dessous un graphique de l'accélération tangentielle en fonction du temps pour une auto miniature télécommandée qui se déplace le long d'un cercle de rayon $r = 4$ m. Supposez que l'auto parte du repos à s_0 lorsque $t = 0$ s.



Pour les questions suivantes, **considérez l'intervalle de temps** $0 < t \leq 5$ **s**. N'oubliez pas d'inclure aussi les unités appropriées ou votre réponse sera mauvaise.

(a) [1 point] À quel(s) temps, s'il y en a, l'auto change-t-elle de direction le long de sa trajectoire curviligne? Écrivez "aucun" si elle ne change pas de direction.

$\boxed{\text{4 s (au moment où l'aire totale = 0)}}$

(b) [1 point] À quel(s) temps, s'il y en a, l'auto retournera-t-elle à sa position initiale s_0? Écrivez "aucun" si elle ne retourne pas à s_0.

$\boxed{\text{aucun}}$ (l'aire totale du graphique v vs. t -voir plus bas- est toujours négative, jamais nulle.)

(c) [2 points] Pendant cet intervalle de temps, la <u>valeur maximale</u> de la <u>composante normale</u> de l'accélération vaut $\boxed{4 \text{ m/s}^2}$, et elle se produit au temps $t = \boxed{3 \text{ s}}$.

Le graphique de v en fonction de t est donnée par:

$0 < t < 1 :\ v = -2t,\ v_{t=1} = -2$

$1 < t < 3 :\ v = -t - 1,\ v_{t=3} = -4$

$3 < t < 4 :\ v = 4t - 16,\ v_{t=4} = 0$

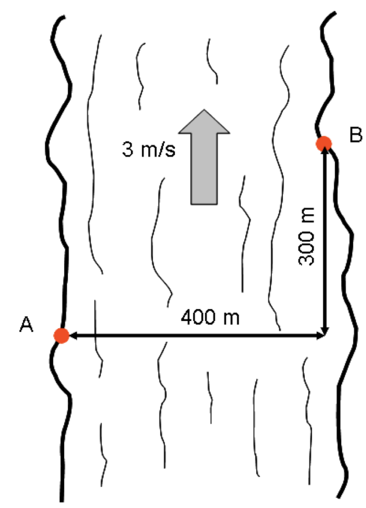
$4 < t < 5 :\ v = t - 4,\ v_{t=5} = 1$

On voit que v a grandeur max $= 4$ m/s à $t = 3$ s. On a donc $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 4$ m/s^2

suite à la page suivante...

Question 3. [5 points]

La rivière ci-dessous coule vers le nord à 3 m/s. Vous êtes dans un bateau qui se déplace à une vitesse constante v par rapport à l'eau. Vous souhaitez vous déplacer le long d'une ligne droite du point A au point B en pointant le bateau dans la bonne direction par rapport à l'eau.



Envisagez les situations suivantes :

(a) [1 point] Si $v = 5$ m/s, dans quelle direction devez-vous pointer approximativement votre bateau ?

$\boxed{(1)\ \nearrow}$ (2) $\rightarrow$ (3) $\searrow$ (4) information insuffisante

(b) [1 point] Si $v = 4$ m/s, dans quelle direction devez-vous pointer approximativement votre bateau ?

(1) $\nearrow$ $\boxed{(2)\ \rightarrow}$ (3) $\searrow$ (4) information insuffisante

(c) [1 point] Si $v = 3$ m/s, dans quelle direction devez-vous pointer approximativement votre bateau ?

(1) $\nearrow$ (2) $\rightarrow$ $\boxed{(3)\ \searrow}$ (4) information insuffisante

(d) [1 point] Quelle est la valeur minimale de v qui permettra à votre bateau de se déplacer le long de la ligne droite du point A au point B ?

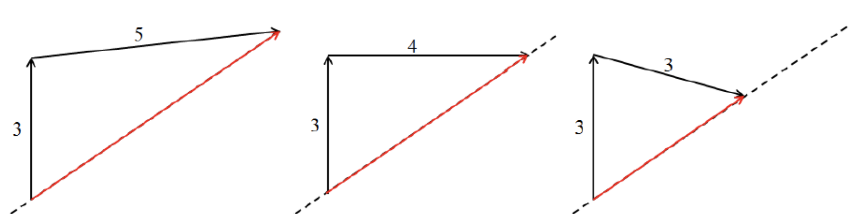
Réponse: $\boxed{2.4 \text{ m/s}}$

(e) [1 point] Pour la vitesse obtenue en (d), dans quelle direction le bateau doit-il pointer? Répondez en donnant l'angle du bateau par rapport à la direction du flot de la rivière.

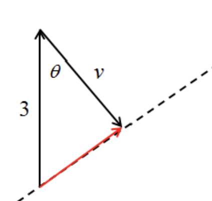
Réponse: $\boxed{143°}$

Solution:

Velocity triangles for the three cases:



With the minimum value of v, the velocity triangle is:



$$\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5} = \frac{v}{3} \Rightarrow v = 2.4 \text{ m/s}$$

The angle **v** makes with the direction of the river flow is:

$180° - \theta = 143°$

suite à la page suivante...

Question 4. [8 points]

L'accélération d'une particule en mouvement vers les x positifs est décrite par $a = \frac{kv^2}{x^3}$, où a est en $\mathrm{m/s^2}$, v est en m/s, et x en m. La valeur numérique de k est 2. Les conditions initiales au temps $t = 0$ sont $x_0 = 1$ m and $v_0 = 10$ m/s. Déterminez:

(a) [2 points] les unités SI de la constante k, et
(b) [6 points] la vitesse vectorielle de la particule quand $x = 5$ m.

$\boxed{\text{Réponses}}$

(a) $k = \frac{ax^3}{v^2}$ donne $\boxed{\mathrm{m}^2}$

(b) On utilise $a\,dx = v\,dv$ avec $a = \frac{2v^2}{x^3}$ qui donne

$$\int_1^5 \frac{2}{x^3}\,dx = \int_{10}^{v} \frac{dv}{v}, \qquad -\frac{1}{x^2} + 1 = \ln\left|\frac{v}{10}\right|$$

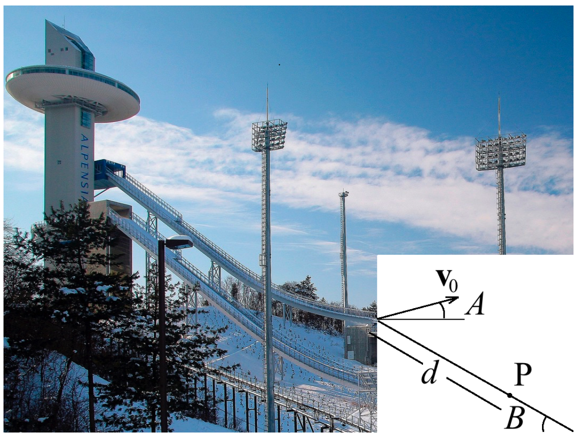
et en prenant l'exponentielle,

$$v = 10 \exp\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{26.1 \text{ m/s}}$$

suite à la page suivante...

Question 5. [8 points]

Lors des Jeux olympiques d'hiver 2018 à PyeongChang, une skieuse quitte la piste à une vitesse v_0 avec un angle de $A = 8.5°$ au-dessus de l'horizontale, montré ci-dessous. Si elle atterrit au point P, à une distance $d = 250$ ft le long de la pente (que l'on représente par une droite inclinée de $B = 28°$, quelle est la vitesse initiale v_0, en miles par heure? (1 mile = 5280 ft)



$\boxed{\text{Solution}}$

We choose the origin at the position of departure, with the x-axis pointing to the right and the y-axis upward. Then the position varies with time as

$$x(t) = v_0(\cos A)t \tag{1}$$

and

$$y(t) = v_0(\sin A)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

At time t', when the skier lands at a distance d down the slope, her position is given by

$$x(t') = d\cos B, \qquad y(t') = -d\sin B. \tag{3}$$

From Eqs. (1) and (3), we obtain the duration of flight,

$$t' = \frac{d\cos B}{v_0\cos A}.$$

When we substitute this into Eq. (2), together with Eq. (3), we obtain

$$-d\sin B = v_0 \sin A\frac{d\cos B}{v_0\cos A} - \frac{1}{2}g\frac{d^2\cos^2 B}{v_0^2\cos^2 A},$$

which we solve for v_0,

$$v_0 = \frac{\cos B}{\cos A}\sqrt{\frac{gd}{2\,(\sin B + \cos B\tan A)}} = \frac{\cos 28°}{\cos 8.5°}\sqrt{\frac{(32.2)(250)}{2\,(\sin 28° + \cos 28°\tan 8.5°)}} = 73 \text{ ft/s}$$

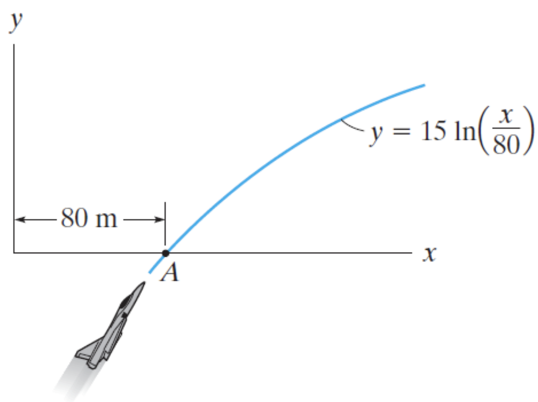
so that $v_0 = 73 \text{ ft/s} \times \frac{1 \text{ mile}}{5280 \text{ ft}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = \boxed{50 \text{ mph}}$

suite à la page suivante...

Question 6. [12 points]

Un jet se déplace à une vitesse de 110 m/s le long du parcours montré ci-dessous. Lorsqu'il atteint le point A, ce jet commence à accélérer tangentiellement le long du parcours à un taux de $0.2s$ m/s^2, où s est la distance parcourue le long du parcours à partir du point A.

(a) Déterminez la grandeur de la vitesse du jet lorsqu'il est à $x = 240$ m ($s = 160.9$ m).
(b) Déterminez la grandeur de l'accélération du jet lorsqu'il est à $x = 240$ m ($s = 160.9$ m). Spécifiez l'angle du vecteur accélération par rapport à l'axe des x positifs.



Solutions

(a) On utilise $a_t\, ds = v\, dv$ qui mène à l'intégrale $\int_0^{160.9} 0.2s\, ds = \int_{110}^{s} v\, dv$ et $v = \sqrt{\frac{160.9^2}{5} + 110^2} = \boxed{131.445 \text{ m/s}}$

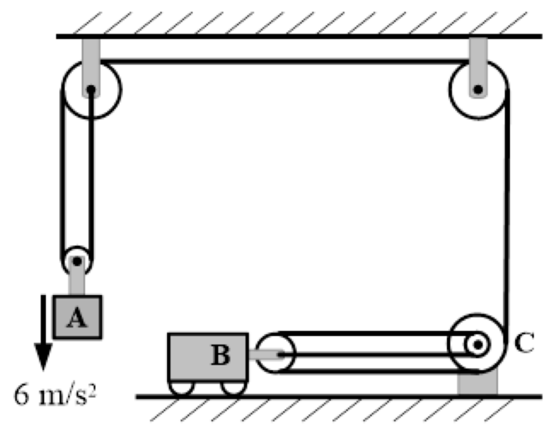
(b) $a_t = 0.2(160.9) = 32.18$ m/s^2
Direction donnée par $\tan\theta = y' = \frac{15}{240}$, $\theta = 3.576°$
$y' = \frac{15}{x}$, $y'' = -\frac{15}{x^2}$, $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = 3862.52$ m
$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{131.445^2}{3862.52} = 4.4732$ m/s^2
Grandeur de $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{32.18^2 + 4.4732^2} = \boxed{32.5 \text{ m/s}^2}$
Direction de **a** (p/r direction du mouvement, qui est à 3.576°): $\tan\phi = \frac{a_n}{a_t}$ donne $\phi = 7.9137°$, et donc, par rapport à l'axe x, la direction de **a** est $3.576 - 7.9137 = \boxed{-4.34°}$

suite à la page suivante...

Question 7. [10 points]

Le système de poulies ci-dessous est initialement au repos ($t = 0$ s). Si le bloc A se déplace vers le bas avec une accélération constante de 6 m/s^2,

(a) déterminez la vitesse du bloc B au temps $t = 3$ s, en indiquant clairement sa grandeur et sa direction, et
(b) déterminez le temps écoulé lorsque la grandeur de la vitesse relative de B par rapport à A est égale à 25 m/s. Indiquez clairement la direction de cette vitesse relative et illustrez graphiquement sa direction.



Solutions

(a) s_A du plafond vers le bloc A, et s_B de la poulie C vers le bloc B. Longueur $= 2s_a + 3s_b$ donne $a_B = -\frac{2}{3}a_A = -4$ m/s^2 (vers la droite). À $t = 3$ s on a $v_B = a_B t = 12$ m/s

(b) Pour A et B, on a $\mathbf{v} = \mathbf{a}t$.

La vitesse de B p/r A est $\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)t = 4t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$. La grandeur de la vitesse est $v_{BA} = \sqrt{(4t)^2 + (6t)^2} = t\sqrt{52} = 25$, qui donne $t = \frac{25}{\sqrt{52}} = \boxed{3.47 \text{ s}}$

La direction est donnée par $\tan\theta = \frac{6t}{4t}$ et $\theta = \boxed{56.3^\circ}$

Bonne chance!

page de calculs

page de calculs

Fundamental Equations of Dynamics

KINEMATICS

Particle Rectilinear Motion

Variable a	*Constant $a = a_c$*
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Particle Curvilinear Motion

x, y, z Coordinates		*r, θ, z Coordinates*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n, t, b Coordinates

$v = \dot{s}$

$a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relative Motion

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Rigid Body Motion About a Fixed Axis

Variable α	*Constant $\alpha = \alpha_c$*
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

For Point P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relative General Plane Motion—Translating Axes

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pin})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pin})}$

Relative General Plane Motion—Trans. and Rot. Axis

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICS

Mass Moment of Inertia $I = \int r^2\,dm$

Parallel-Axis Theorem $I = I_G + md^2$

Radius of Gyration $k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

Equations of Motion

Particle	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Rigid Body (Plane Motion)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

Principle of Work and Energy

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

Kinetic Energy

Particle	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Rigid Body (Plane Motion)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Work

Variable force	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constant force	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Weight	$U_W = -W\,\Delta y$
Spring	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Couple moment	$U_M = M\,\Delta\theta$

Power and Efficiency

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \varepsilon = \dfrac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}$

Conservation of Energy Theorem

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potential Energy

$V = V_g + V_e$, where $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

Principle of Linear Impulse and Momentum

Particle	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Rigid Body	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Conservation of Linear Momentum

$\Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_2$

Coefficient of Restitution $e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

Principle of Angular Impulse and Momentum

Particle	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = (d)(mv)$
Rigid Body (Plane motion)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ where $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = I_O\omega$

Conservation of Angular Momentum

$\Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_2$

APPENDIX A

Mathematical Expressions

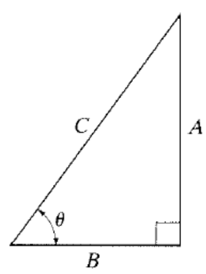
Quadratic Formula

If $ax^2 + bx + c = 0$, then $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hyperbolic Functions

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

Trigonometric Identities



$\sin\theta = \dfrac{A}{C}$, $\csc\theta = \dfrac{C}{A}$

$\cos\theta = \dfrac{B}{C}$, $\sec\theta = \dfrac{C}{B}$

$\tan\theta = \dfrac{A}{B}$, $\cot\theta = \dfrac{B}{A}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$, $\sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Power-Series Expansions

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

Derivatives

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u\frac{du}{dx}$$

Integrals

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\ ab < 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C, ab > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C, a^2 > x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + C, a > 0$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C, c > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C, c < 0$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax) + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

A