Faculté Saint-Jean — **Automne 2018**

PHYSQ 208 LEC A1 - Aspects de la physique moderne — **Examen final**

Nom SOLUTIONS

Numéro d'étudiant.e ______________________________

Professeur Marc de Montigny

Date Vendredi 14 décembre 2018, de 14 h à 17 h

Local Local 366

INSTRUCTIONS

- Ce cahier contient **7 pages**. Écrivez-y directement vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso pour vos calculs. Je ne le corrigerai pas, sauf si vous m'indiquez de le faire.
- L'examen contient **40 points** et vaut **40%** de la note finale du cours.
- L'examen contient **13 questions**. Vous pouvez obtenir une partie des points même si votre réponse finale n'est pas correcte.
- Examen à livre fermé. Vous pouvez utiliser l'aide-mémoire (une feuille recto-verso) que vous aurez imprimé et complété. Vous perdrez 10/40 si vous y avez inclus des solutions ou si vous ne retournez pas votre aide-mémoire avec l'examen.
- **Matériel permis:** aide-mémoire, crayon ou stylo, calculatrice. Tout autre appareil électronique ou moyen de communication est interdit. Mettez vos téléphones cellulaires hors circuit.

Si quelque chose n'est pas clair, n'hésitez pas à me demander de clarifier!

Question 1. Effet photoélectrique [2.0 points]

Une personne suggère que des photoélectrons peuvent être éjectés d'un morceau de métal en le plaçant tout près d'une antenne de transmission qui envoie un signal (c.-à-d. des photons) radio suffisamment puissant, avec 1 cm $< \lambda <$ 10 km. Si un métal typique a un travail d'extraction ϕ de quelques eV, est-ce que ça pourra fonctionner? Expliquez brièvement.

$\boxed{\text{Réponse: Non, l'énergie des photons incidents est trop petite.}}$ Comme les photons incidents ont $10^{-2} < \lambda < 10^{4}$ m, leur énergie sera $\frac{1240}{\lambda}$ qui donne environ $10^{-10} < E < 10^{-4}$ eV.

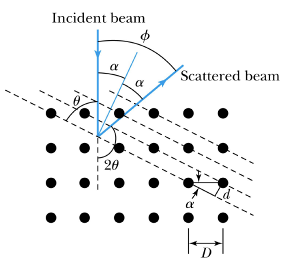
Question 2. Expérience de Davisson-Germer [3.5 points]

Dans une expérience de Davisson-Germer, on observe un premier faisceau électronique réfléchi plus intense (c.-à-d. max à l'ordre $n = 1$) à $\phi = 34°$ pour un cristal dont la distance interatomique est $D = 0.18$ nm. Calculez, pour les électrons incidents ($m_e = 511$ keV/c^2),

(a) la longueur d'onde λ, (gardez 5 chif sigs pour la suite des calculs)

(b) la quantité de mouvement p, et

(c) l'énergie cinétique relativiste K.



$\boxed{\text{Solution}}$

(a) $\lambda = D \sin\phi = (0.18)\sin(34°) = 0.10065 \approx \boxed{0.101 \text{ nm}}$

(b) $p = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{1240}{(0.10065)c} = 12319 \approx \boxed{12.3 \text{ keV}/c}$

(c) $K = E - mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 = \sqrt{(12319)^2 + (511000)^2} - 511000 = \boxed{148 \text{ eV}}$

Question 3. Principe de Heisenberg [2.0 points]

Quelle est l'incertitude minimum Δv sur la vitesse d'une bactérie de masse 6.3×10^{-16} kg si nous connaissons sa position avec une précision égale à 0.85 μm, soit sa propre taille.

$\boxed{\text{Solution}}$

De $\Delta p \Delta x = m\Delta v \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$, on obtient

$$\Delta v = \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.626 \times 10^{-34}/2\pi}{2(6.3 \times 10^{-16})(0.85 \times 10^{-6})} = \boxed{9.85 \times 10^{-14} \text{ m/s}}$$

suite à la page suivante...

Question 4. Atomes hydrogénoïdes [4.0 points]

Soit un atome hydrogénoïde titane, Ti^{21+}, ionisé de tous ses électrons sauf un seul.

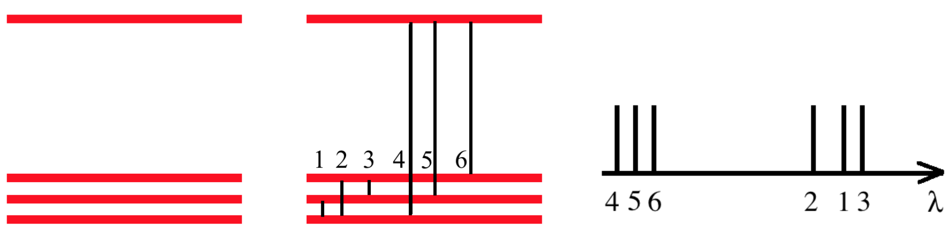
(a) Quel est le rayon de l'orbite de l'électron dans l'état $n = 3$?
(b) Quelle est l'énergie de l'état $n = 3$?
(c) Quelle est l'énergie de l'état $n = 1$?
(d) Quelle est la longueur d'onde des photons émis lors de la transition de $n = 3$ vers $n = 1$?

Solutions

(a) On a $Z = 21 + 1 = 22$. Le rayon est $r_n = \frac{n^2}{Z} a_B = \frac{3^2}{22}(0.0529 \text{ nm}) = \boxed{0.022 \text{ nm}}$ pour $n = 3$.
(b) $E_n = -\frac{Z^2}{n^2} E_R = -\frac{22^2}{3^2}(13.6) = \boxed{-730 \text{ eV}}$ pour $n = 3$.
(c) $E_1 = -\frac{22^2}{1^2}(13.6) = \boxed{-6580 \text{ eV}}$
(d) La longueur d'onde de la lumière émise est $\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{1240}{-730+6580} = \boxed{0.21 \text{ nm}}$

Question 5. Raies spectrales [2.5 points]

La figure ci-dessous montre les quatre niveaux d'énergie d'un atome fictif. Tracez qualitativement toutes les raies de transition correspondantes en ordre croissant de λ.



Les raies 1 et 3 sont à peu près égales.

suite à la page suivante...

Question 6. Modèles de l'atome [1.5 point]

Expliquez brièvement la différence entre le modèle atomique de Thomson et le modèle planétaire de Rutherford. Comment celà a-t-il résolu une contradiction expérimentale du modèle de Thomson ?

$\boxed{\text{Réponse:}}$ Pour Rutherford, la charge + est concentrée au centre de l'atome. Celà explique les résultats de l'expérience de Rutheford des particules alpha avec des angles de diffusion plus grands que prédits par le modèle de Thomson.

Question 7. Effet photoélectrique [5.5 points]

Deux lasers, A et B, de longueurs d'ondes telles que $\lambda_A > \lambda_B$, sont utilisés pour produire des photoélectrons à partir d'une surface de césium dont le travail d'extraction vaut $\phi = 1.9$ eV.

(a) Lequel (A ou B) de ces deux lasers contient les photons qui ont la plus grande énergie?
(b) Si $\lambda_A = 620$ nm et $\lambda_B = 410$ nm, quelles seront les énergies cinétiques respectives K_{max} des photoélectrons émis?
(c) Calculez la vitesse maximale des photoélectrons produits par le laser B, en utilisant la formule relativiste de l'énergie cinétique.
(d) Pour quelles valeurs de la longueur d'onde des photons incidents est-ce que des photoélectrons pourront être émis du césium par effet photoélectrique?
(e) Pour quelle longueur d'onde est-ce que les photoélectrons produits à l'aide du césium auraient une énergie cinétique K_{max} égale à leur énergie de masse, 511 keV?

$\boxed{\text{Solutions}}$

(a) $E = \frac{hc}{\lambda}$ montre que E est inversement proportionnel à λ, donc $\boxed{\text{B}}$
(b) $K_{max} = \frac{1240}{\lambda} - 1.9$ donne $\boxed{K_A = 0.10 \text{ eV et } K_B = 1.12 \text{ eV}}$
(c) $K = (\gamma - 1)mc^2$ donne $\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1$. On a aussi $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$. Avec $K_B = 1.12439$ eV et $mc^2 = 511000$ eV on trouve $\boxed{\beta = 0.00209,\ v = 6.28 \times 10^5 \text{ m/s}}$ (varie avec K_B)
(d) $\lambda < \lambda_{max} = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240}{1.9} = 653$ donc $\boxed{\lambda < 653 \text{ nm}}$
(e) $K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \phi$ donne $\lambda = \frac{hc}{K_{max}+\phi} = \frac{1240}{511000+1.9} = \boxed{0.00243 \text{ nm}}$

suite à la page suivante...

Question 8. Effet Compton [4.0 points]

Des rayons X dont $\lambda = 0.024$ nm sont diffusés à un angle de 40° lors d'une expérience de Compton avec des électrons de $m_e = 511$ keV$/c^2$.

(a) Quelle est la longueur d'onde λ' des photons diffusés? (Gardez 5 chif sigs pour la suite.)
(b) Quelle est l'énergie cinétique d'un électron après la collision?
(c) À quelle quantité de mouvement correspond cette énergie?

Solutions

(a) La longueur d'onde après la collision est

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \frac{hc}{mc^2}(1 - \cos\theta) = 0.024 + \frac{1240}{5.11 \times 10^5}(1 - \cos(40°) = \boxed{0.024568 \text{ nm}}$$

(b) L'énergie cinétique d'un électron est la différence d'énergie cinétique du photon:

$$K_e = K' - K = \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) = 1240\left(\frac{1}{0.024} - \frac{1}{0.024568}\right) = \boxed{1.19 \text{ keV}}$$

(c) De la formule relativiste, $E^2 = (pc)^2 + mc^2$, avec $E = mc^2 + K$, on obtient

$$pc = \sqrt{E^2 - m_e^2c^4} = \sqrt{2mc^2K + K^2} = \sqrt{2(5.11 \times 10^5)(1.19 \times 10^3) + (1.19 \times 10^3)^2} = 3.489 \times 10^4 \text{ eV},$$

de sorte que $\boxed{p = 34.9 \text{ keV}/c}$

Question 9. Annihilation d'une paire électron-positron [2.5 points]

Un positron et un électron, initialement très éloignés, s'approchent l'un de l'autre à des vitesses égales. Prenez $m_{e+} = m_{e-} = 511$ keV$/c^2$. Suite à leur collision, ils s'annihilent et deux photons sont créés. Calculez les *énergies* et les *longueurs d'onde* des deux photons si l'énergie cinétique initiale de chaque particule incidente (positron et électron) est

(a) négligeable et
(b) égale à 5.00 MeV.

Solutions

On a $P_f = P_i = 0$ et l'énergie totale des photons est égale à l'énergie cinétique total des positron et électron: $E + E = (K + mc^2) + (K + mc^2)$ de sorte que chaque photon a comme énergie $E = K + mc^2$.
(a) Avec $K = 0$ on a pour chaque photon $\boxed{E = mc^2 = 511 \text{ keV}}$ et la longueur d'onde $\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240}{511000} = \boxed{2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}}$
(b) Avec $K = 5000$ keV, chaque photon a $E = 5000 + 511 = \boxed{5511 \text{ keV}}$ et comme longueur d'onde $\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240}{5.511 \times 10^6} = \boxed{2.25 \times 10^{-4} \text{ nm}}$

suite à la page suivante...

Question 10. Dualité onde-corpuscule [1.5 point]

Si un électron a une vitesse égale à celle d'un proton, sachant que $m_p \gg m_e$, est-ce que la longueur d'onde du proton est plus grande, plus petite ou égale à celle de l'électron? Expliquez brièvement.

$\boxed{\text{Réponse: } \lambda_p < \lambda_e}$ car $\lambda = \frac{h}{p}$ et $p_e = m_e v \ll m_p v = p_p$.

Question 11. Puits de potentiel infini [5.5 points]

Un muon de masse 106 MeV/c^2 dans un puits de potentiel infini de longueur égale à 0.136 nm a une énergie de 2.45 eV.

(a) À quel niveau n se trouve ce muon?
(b) Dessinez la fonction d'onde ψ_n correspondante.
(c) Quelle est la quantité de mouvement du muon en keV/c?
(d) Quelle est l'énergie E_1 du niveau fondamental?
(e) Quelle est la fonction d'onde, ψ_n, en nm$^{-1/2}$? [x en nm, avec le n trouvé en (a)]
(f) Quelle est le pourcentage de probabilité que le muon se trouve entre $x = 0.120$ nm et $x = 0.125$?
[Indice: $\int_a^b \sin^2(kx)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2k}\sin(2kx)\right]_a^b$]

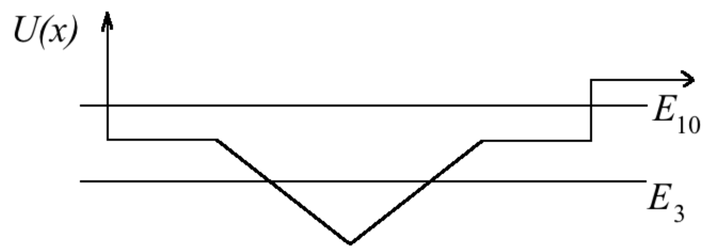
$\boxed{\text{Solutions}}$

(a) $E_n = \frac{n^2(hc)^2}{8mc^2a^2}$ donne $n = \frac{a\sqrt{8mc^2E_n}}{hc} = \frac{0.136\sqrt{8(1.06\times10^8)(2.45)}}{1240} = \boxed{5}$
(b) La fonction d'onde a $\boxed{\text{4 noeuds}}$
(c) $p_n = \hbar k_n = \frac{n\pi\hbar}{a} = \frac{n(hc)}{2ac} = \frac{(5)(1240)}{2(0.136)c} = \boxed{22.8 \text{ keV}/c}$
(d) $E_1 = \frac{E_5}{5^2} = \frac{2.45}{25} = \boxed{0.098 \text{ eV}}$
(e) $\psi_5 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) = \boxed{3.83 \text{ nm}^{-1/2}\ \sin(115\ x)\ [x \text{ en nm}]}$
(f) $\int_{0.120}^{0.125}(3.83)^2\sin^2(115x)\ dx = (3.83)^2\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{230}\sin(230x)\right]_{0.120}^{0.125} = 0.0712 = \boxed{7.1\ \%}$

suite à la page suivante...

Question 12. Tracé qualitatif de fonctions d'ondes [2.0 points]

Pour le potentiel donné ci-dessous, faites un tracé qualitatif des fonctions d'ondes qui correspondent aux niveaux d'énergie E_3 et E_{10} illustrés, respectivement. Dans quelle(s) région(s) la particule a-t-elle une plus grande probabilité de se trouver?



Solutions

(a) $\psi_3(x)$ a 2 noeuds, symétrique, amplitude et longueur d'onde plus grandes sur les côtés. $\psi_{10}(x)$ a 9 noeuds, antisymétrique, amplitude et longueur d'onde plus grandes sur les côtés.
(b) Probabilité plus grande sur les côtés.

Question 13. Puits infini à deux dimensions [3.5 points]

Considérez un proton ($m = 938$ MeV/c^2) dans un puits infini à deux dimensions qui mesure $a = 0.025$ nm par $b = 3a = 0.075$ nm.

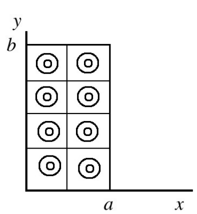
(a) Quelle est l'énergie de l'état $(n_x, n_y) = (2, 4)$?
(b) Tracez les courbes de niveaux qui représentent la densité de probabilité de l'état $(n_x, n_y) = (2, 4)$ et indiquez à quels points (x, y) la chance de trouver le proton sera la plus élevée.
(c) Quelle sera la fréquence d'un photon émis lors de la transition de l'état $(n_x, n_y) = (2, 4)$ à l'état $(1, 1)$?

Solutions

(a) Avec $b = 3a$, l'énergie du niveau (n_x, n_y) est donnée par

$$E_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2M}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}\right) = \overbrace{\frac{(hc)^2}{8Mc^2a^2}}^{E_0}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{9}\right)$$

où $E_0 = 0.3278$ eV, de sorte que $E_{(2,4)} = (0.3278)(2^2 + 4^2/9) = \boxed{1.89\text{ eV}}$. On a aussi $E_{(1,1)} = 0.364$ eV.
(b) Voir figure ci-dessous qui montre que la probabilité sera plus grande à $\boxed{x = \frac{a}{4},\ \frac{3a}{4}}$ et $\boxed{x = \frac{b}{8},\ \frac{3b}{8},\ \frac{5b}{8},\ \frac{7b}{8}}$



(c) $\lambda = \frac{hc}{E_{(2,4)} - E_{(1,1)}} = \frac{1240}{1.89 - 0.364} = 813$ nm et $f = \frac{c}{\lambda} = \boxed{3.69 \times 10^{14}\text{ Hz}}$

Bonnes vacances!