PHYSQ 208 – Devoir 10 (jeudi 1er décembre)

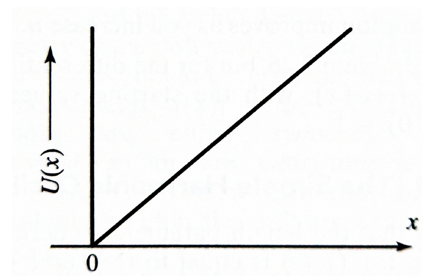
1. Puits infini comme modèle d'un noyau. Comme nous le verrons, le tritium (^3H) est un isotope nucléaire artificiel de l'hydrogène (noyau constitué d'un proton et deux neutrons). Le tritium est important dans de nombreuses applications. Cet isotope subit une désintégration bêta, émettant un électron avec une énergie cinétique moyenne de 5.1 keV.

(a) Quelle est la longueur d'onde de de Broglie de l'électron émis à cette énergie K?

(b) Est-il probable que l'électron existait à l'intérieur du noyau, de 3.5 fm de diamètre, juste avant son émission? (Pour répondre, modélisez le diamètre comme la longueur a d'un puits infini et calculez l'énergie E_1 de son niveau fondamental; si $E_1 \cong K$, on peut conclure que l'électron était dans le noyau.)

2. Puits fini. Considérez un puits de potentiel fini de longueur $a = 3.00 \times 10^{-15}$ m qui contient une particule de masse 1.88 GeV/c^2. (Cette situation est semblable à un deutéron à l'intérieur d'un noyau.) Quelle doit être la profondeur de ce puits de potentiel pour qu'il contienne trois niveaux d'énergie? En d'autres mots, cherchez $U_0 = E_3$ avec l'approximation d'un puits *infini*.

3. Tracé de fonctions d'ondes. Considérez le potentiel linéaire infini ci-contre (qui est en fait l'énergie potentielle gravitationnelle, mgx, au-dessus d'une surface dure). Esquissez les fonctions d'ondes de l'état fondamental et des deux premiers états excités de ce potentiel.



4. Puits infini à 2D. Considérez un électron (m = 511 keV/c^2) dans un puits infini à deux dimensions dont les côtés mesurent a = 3.80 nm et $b = 2a$. Dressez un tableau des cinq plus bas niveaux d'énergie en indiquant pour chacun les valeurs de n_x et n_y, l'énergie E en eV, et le degré de dégénerescence de chaque niveau.

5. Puits infini à 2D. La fonction d'onde de la question 4 a la forme

$$\psi(x,y) = A \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right)$$

(a) Quelle est la valeur de la constante A pour normaliser ψ ?

(b) Tracez les courbes de niveaux pour l'état $n_x = 1$ et $n_y = 2$ et indiquez les points (x,y) auxquels on a plus de chance de trouver l'électron.

(c) Répétez la partie (b) avec $n_x = 4$ et $n_y = 3$.

PHYSQ 208, DEVOIR 10 (1 DÉC 2022)

#1(a) $\lambda = \frac{hc}{pc}$ AVEC $pc = \sqrt{2mc^2K}$

NON-RELATIVISTE CAR $K = 5.1$ keV $\ll mc^2 = 511$ keV

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2(5.11\times10^5)(5100)} \text{ eV}} = \boxed{0.0172 \text{ nm}}$$

(b) $$E_1 = \frac{(hc)^2}{8mc^2a^2} = \frac{(1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})^2}{8(5.11\times10^5 \text{eV})(3.5\times10^{-6}\text{nm})^2}$$

$$= 3.1\times10^{10} \text{ eV} \quad \text{OU} \quad \boxed{31 \text{ GeV}}$$

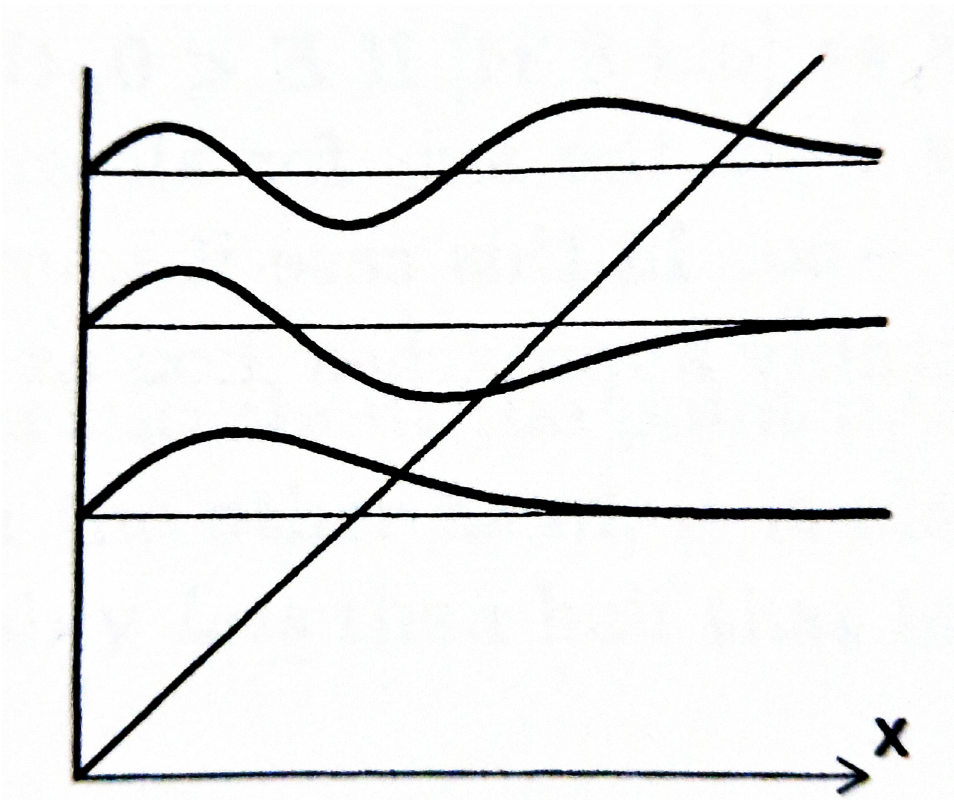
$\boxed{E_1 \gg K}$ QUI IMPLIQUE QUE L'ÉLECTRON N'ÉTAIT PAS DANS LE NOYAU AVANT D'ÊTRE ÉMIS

#2. ON CALCULE

$$U_0 = E_3 = \frac{3^2(hc)^2}{8mc^2a^2} = \frac{3^2(1240)^2}{8(1.88\times10^9)(3\times10^{-6})^2}$$

$$= \boxed{102 \text{ MeV}}$$

3. **Les fonctions d'ondes s'annulent à $x = 0$ et pénètrent un peu à droite. Le niveau $n = 1$ compte 0 noeud, avec $n = 2$, on a 1 noeud, et pour $n = 3$ a 2 noeuds. La longueur d'onde et l'amplitude sont plus grandes vers la droite qu'à gauche.**



#4. $E_{n_x n_y} = E_0 \left[n_x^2 + \frac{n_y^2}{(b/a)^2} \right]$

AVEC $E_0 = \frac{(hc)^2}{8mc^2a^2} = \frac{1240^2}{8(5.11\times10^5)(3.8)^2} = 2.6\times10^{-2}\,eV$

ou $26\,meV$

$b = 2a$ implique $b/a = 2$, d'où

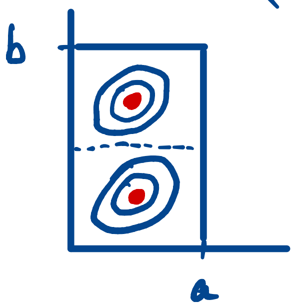
$$E_{n_x n_y} = \frac{E_0}{4}\left[4n_x^2 + n_y^2\right] = 6.5\left[4n_x^2 + n_y^2\right] meV$$

n_x	n_y	E (meV)
1	1	5(6.5) = 32.5
1	2	8(6.5) = 52.0
1	3	13(6.5) = 84.5
2	1	17(6.5) = 111
2	2	20 (6.5) = 130
1	4	" = 130

#5. (a) $A^2\int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx\int_0^b \sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dy = A^2\,\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$

QUI VAUT 1 SI $\boxed{A=\frac{2}{\sqrt{ab}}}$

(b) MAX À $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{4}\right)$ ET $\left(\frac{a}{2},\frac{3b}{4}\right)$



(c) MAX AUX 12 POINTS, DONT $x=\frac{a}{8},\frac{3a}{8},\frac{5a}{8}$ ET $\frac{7a}{8}$ AVEC $y=\frac{b}{6},\frac{3b}{6}=\frac{b}{2}$ ET $\frac{5b}{6}$.