Faculté Saint-Jean **automne 2022**
PHYSQ 208 LEC A1 - Aspects de la physique moderne **examen final**

Nom	SOLUTIONS
Numéro	____
Professeur	Marc de Montigny
Date	lundi 19 décembre 2022, de 9h à midi
Lieu	local 366

INSTRUCTIONS

- Ce cahier contient **10 pages**, incluant celle-ci et une page vide pour vos calculs à la fin. Écrivez-y directement vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso pour vos calculs; je ne le corrigerai pas, sauf si vous m'indiquez de le faire.
- L'examen contient **16 questions**. Vous pouvez obtenir une partie des points pour les solutions, même si les réponses finales sont erronées.
- L'examen contient **40 points** et vaut **40%** de la note finale du cours.
- Examen à livre fermé. Vous pouvez utiliser l'aide-mémoire (une feuille recto-verso) que vous aurez complété et imprimé. Vous perdrez 10/40 si vous y avez inclus des solutions ou si vous ne retournez pas votre aide-mémoire avec l'examen.
- Matériel permis: crayon ou stylo, aide-mémoire, calculatrice (programmable ou graphique permise aussi). Tout autre appareil électronique ou moyen de communication est interdit. Mettez vos téléphones cellulaires hors circuit.

Si quelque chose n'est pas clair, n'hésitez pas à me demander de clarifier!

Question 1. Photons [2.0 points]

Par temps clair, la lumière du Soleil frappe un mètre carré de la surface de la Terre avec une puissance d'environ 1400 watts. En considérant que la lumière du Soleil soit principalement dans la région du visible, avec $\lambda \approx 500$ nm,

(a) quel est le nombre approximatif de photons qui passent dans un mètre carré par seconde?
(b) Combien de photons frapperaient une main, dont la surface est environ 10 cm par 10 cm?

$\boxed{\text{Solutions}}$

(a) L'énergie de chaque photon vaut $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240}{500} = 2.48$ eV. À chaque seconde, le nombre de tels photons dans 1400 joules vaut

$$\frac{1400 \text{ J}}{2.48 \text{ eV/photon}} \times \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = \boxed{3.5 \times 10^{21} \text{ photons}}$$

(b) L'aire vaut $0.1 \times 0.1 = 0.01$ m^2, qui est 1/100ème de 1 m^2. Donc le nombre de photons serait de $\boxed{3.5 \times 10^{19} \text{ photons}}$

Question 2. Effet photoélectrique [2.0 points]

La longueur d'onde du seuil photoélectrique d'une surface de tungstène vaut 272 nm.

(a) Quelle est l'énergie cinétique maximale, en électron-volts, des photoélectrons éjectés de cette surface par un rayonnement ultraviolet de fréquence 1.45×10^{15} Hz?
(b) Quelles longueurs d'onde le rayonnement incident doit-il avoir pour que des photoélectrons soient effectivement émis de cette surface?

$\boxed{\text{Solutions}}$

(a) L'énergie cinétique vaut (avec des unités contenant eV pour h)

$$K_{\text{max}} = hf - \phi = hf - \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = (4.14 \times 10^{-15})(1.45 \times 10^{15}) - \frac{1240}{272} = \boxed{1.44 \text{ eV}}$$

(b) $\boxed{\lambda < 272 \text{ nm}}$ car $E \propto \frac{1}{\lambda}$.

Question 3. Rayons X [2.0 points]

Les voltages d'accélération dans certaines télévisions à tube cathodique valent environ 25.0 kV. (Ces télévisions sont blindées pour nous protéger des rayons X.) Quelles sont

(a) la fréquence la plus élevée et
(b) la longueur d'onde la plus courte des rayons X qu'un tel écran de télévision pourrait produire?

$\boxed{\text{Solutions}}$

(a) $hf = eV_0$ implique $f = \frac{eV_0}{h} = \frac{25 \times 10^3}{4.14 \times 10^{-15}} = \boxed{6.04 \times 10^{18} \text{ Hz}}$
(b) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{6.04 \times 10^{18}} = \boxed{4.97 \times 10^{-2} \text{ nm ou } 4.97 \times 10^{-11} \text{ m}}$

... suite en p. 3

Question 4. Effet Compton [3.5 points]

Dans une expérience de Compton, un photon est dévié vers l'arrière (c.-à-d. $\theta = 180°$) à la suite d'une collision avec un proton ($m = 938.3$ MeV/c^2) libre, initialement au repos.

(a) Quelle doit être la longueur d'onde λ du photon incident pour que le changement de longueur d'onde $\Delta\lambda$, suite à la collision, vaille 10.0% de la longueur d'onde initiale λ, c.-à-d. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.10$?
(b) Si $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ était inférieur à 10.0%, avec les autres variables inchangées, est-ce que la longueur d'onde du photon incident devrait être plus grande, plus petite ou égale à votre réponse en (a)? Expliquez.
(c) En considérant que le changement d'énergie du photon est égal à l'énergie cinétique finale du proton, quelle sera la quantité de mouvement finale du proton?
(d) Quelle sera la longueur d'onde de de Broglie du proton final?

$\boxed{\text{Solutions}}$

(a) On désire $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.1$, avec $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, qui donne $\Delta\lambda = 0.1\lambda$. De la formule de Compton,

$$\Delta\lambda = 0.1\lambda = \frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta) \rightarrow \lambda = 10\frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta) = 10\frac{1240}{9.383 \times 10^8}(1-\cos 180°) = \boxed{2.64 \times 10^{-5}\ \text{nm}}$$

(b) $\boxed{\lambda \text{ serait plus grande}}$ car, de la solution, on voit que le facteur 10 serait remplacé par un nombre supérieur.
(c) On calcule l'énergie cinétique

$$K = \Delta E_{\text{ph}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = 1240\left(\frac{1}{2.64 \times 10^{-5}} - \frac{1}{2.64 \times 10^{-5} + 2.64 \times 10^{-6}}\right) = 4.27\ \text{MeV}$$

ce qui permet de calculer, avec la formule relativiste,

$$pc = \sqrt{2mc^2K + K^2} = \sqrt{2(938.3)(4.27) + (4.27)^2} = 89.6 \rightarrow \boxed{p = 89.6\ \text{MeV}/c}$$

(d) De la formule de de Broglie,

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{1240}{89.6 \times 10^6} = \boxed{1.38 \times 10^{-5}\ \text{nm}}$$

... suite en p. 4

Question 5. Modèle de Bohr de l'hydrogène et transitions [2.5 points]

Un atome d'hydrogène, initialement dans son état fondamental, absorbe un photon qui excite l'atome jusqu'au niveau $n = 4$. Quelles sont

(a) la longueur d'onde du photon et
(b) la fréquence du photon?

Solutions

(a) L'écart d'énergie vaut

$$\Delta E = E_4 - E_1 = -13.6\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2}\right) = +12.75 \text{ eV}$$

d'où

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240}{12.75} = \boxed{97.3 \text{ nm}}$$

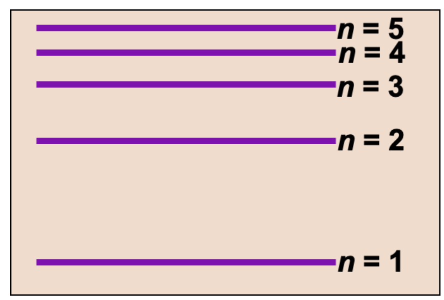
(b) De $v = c = \lambda f$, on calcule

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{97.3 \times 10^{-9}} = \boxed{3.08 \times 10^{15} \text{ Hz}}$$

Question 6. Modèle de Bohr: niveaux et transitions [1.5 point]

Combien de transitions différentes existent entre *cinq* niveaux d'énergie d'un atome? (Ne comptez qu'une direction par transition. Encerclez la réponse.)

A. 4 B. 5 C. 10 D. 20 E. plus que 20



Réponse: C simplement en comptant les transitions possibles.

Question 7. Atomes hydrogénoïdes [2.5 points]

Selon le modèle de Bohr d'un atome hydrogénoïde, si on *double* le nombre de protons Z, par quel facteur les quantités suivantes vont-elles changer?

(a) La vitesse v_n d'un électron sur son orbite.
(b) Le rayon r_n de chaque orbite.
(c) L'énergie d'ionisation E_n de chaque orbite.
(Encerclez la bonne réponse.)

A. (a) 1/2 (b) 2 (c) 1/4
B. (a) 2 (b) 1/2 (c) 4
C. (a) 1/2 (b) 4 (c) 1/4
D. (a) $\sqrt{2}$ (b) 1/2 (c) 4
E. aucune des réponses précédentes

Réponse: B car (a) $v_n \propto Z$, (b) $r_n \propto \frac{1}{Z}$, (c) $E_n \propto Z^2$

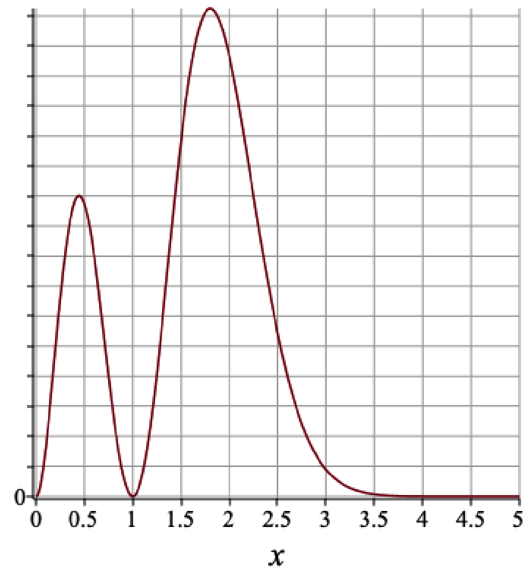
... suite en p. 5

Question 8. Graphique de densité de probabilité [2.5 points]

La figure ci-contre représente la densité de probabilité d'un électron dans un atome d'hydrogène. En utilisant les carrés, quelle est approximativement la probabilité que l'électron se trouve dans l'intervalle

(a) $0 \leq x \leq 1$?

(b) $1 \leq x \leq 2$?



Solutions

On compte environ 44 carrés au total, dont environ 11 dans $0 \leq x \leq 1$, et 20 dans $1 \leq x \leq 2$, donc

(a) $\boxed{25\%} = 11/44$

(b) $\boxed{45\%} = 20/44$

... suite en p. 6

Question 9. Fonction d'onde et probabilité [3.0 points]

Une particule qui se trouve sur l'axe x est décrite par la fonction d'onde normalisée

$$\psi(x) = \begin{cases} A\exp(-bx)\,, & x \geq 0, \\ A\exp(+bx)\,, & x < 0, \end{cases}$$

où $b = 2.00~\mathrm{m}^{-1}$ et $A = \sqrt{b} = \sqrt{2} = 1.41~\mathrm{m}^{-1/2}$.

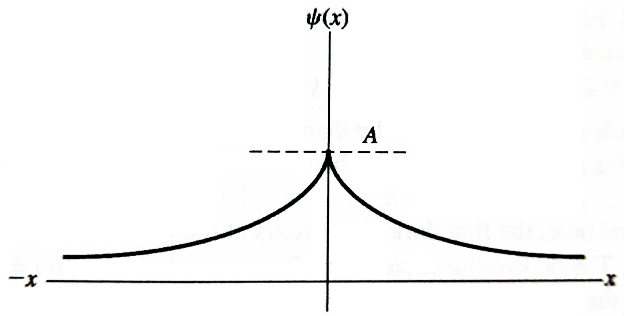
(a) Esquissez le graphique de cette fonction d'onde.

(b) Quelle est la probabilité de trouver cette particule à moins de 50 cm de l'origine, c.-à-d. dans l'intervalle $-0.50 \leq x \leq 0.50$ m? (Indice: intégrale indéfinie $\int \exp(kx)\ dx = \frac{1}{k}\exp(kx)$.)

(c) D'après votre graphique en (a), et sans faire de calculs, quelle est la probabilité de trouver cette particule à $x \leq 0$?

Solutions

(a)



(b) En exploitant la symétrie de la fonction à intégrer, la probabilité est donnée par

$$P = \int_{-0.50}^{+0.50} |\psi(x)|^2 = \int_{-0.50}^{0.00} A^2 e^{2bx}\,dx + \int_{0.00}^{+0.50} A^2 e^{-2bx}\,dx = 2\int_{0.00}^{+0.50} A^2 e^{-2bx}\,dx = 2A^2\left[-\frac{1}{2b}e^{-2bx}\right]_{0.00}^{0.50}$$

$$P = -\frac{A^2}{b}\left(e^{-2b(0.50)} - 1\right) = -\frac{2.00}{2.00}\left(e^{-2} - 1\right) = 0.865 = \boxed{86.5\%}$$

(c) Comme la moitié de l'aire se trouve à $x \leq 0$, la probabilité vaut $\boxed{50\%}$

... suite en p. 7

Question 10. Puits infini 1D [3.0 points]

Lorsqu'un atome d'hydrogène subit une transition de $n = 2$ vers $n = 1$, un photon de longueur d'onde $\lambda_0 = 122$ nm est émis. Si on modélise plutôt cet atome comme un électron piégé dans un puits infini à une dimension,

(a) quelle est la longueur a du puits pour qu'une transition de $n = 2$ vers $n = 1$ dans le puits émette un photon avec le même λ_0 que l'hydrogène?
(b) Pour un puits ayant cette longueur a, quelle est l'énergie de son état fondamental?
(c) De combien cette énergie différe-t-elle de l'énergie (-13.6 eV) de l'état fondamental de l'hydrogène?

Solutions

(a) La différence d'énergie entre les niveaux est $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240}{122} = 10.16$ eV. Avec le modèle du puits infini,

$$\Delta E = \frac{(hc)^2}{8mc^2a^2}\left(n_2^2 - n_1^2\right) \to a^2 = \frac{(hc)^2}{8mc^2\Delta E}\left(n_2^2 - n_1^2\right) = \frac{(1240)^2}{8(511000)(10.16)}\left(2^2 - 1^2\right)$$

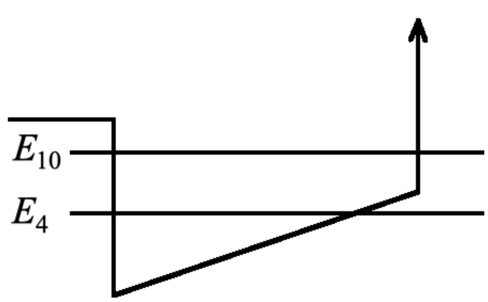
d'où $\boxed{a = 0.333 \text{ nm}}$
(b) L'énergie vaut

$$E_n = \frac{n^2(hc)^2}{8mc^2a^2} = \frac{1^2(1240)^2}{8(511000)(0.333)^2} = \boxed{3.39 \text{ eV}}$$

(c) $3.39 - (-13.6) = \boxed{17.0 \text{ eV}}$

Question 11. Tracé qualitatif de fonctions d'onde [2.5 points]

Pour le potentiel illustré ci-dessous, esquissez qualitativement la fonction d'onde qui correspond
(a) au niveau d'énergie E_4 et
(b) au niveau d'énergie E_{10}.



Réponses

(a) $\psi_4(x)$ a 3 noeuds, plus séparés vers la droite, amplitude plus grande vers la droite, atténuation à gauche et $\psi_4 = 0$ au mur de droite.
(a) $\psi_{10}(x)$ a 9 noeuds, plus séparés vers la droite, amplitude plus grande vers la droite, atténuation à gauche et $\psi_{10} = 0$ au mur de droite.

... suite en p. 8

Question 12. Puits infini 2D [3.0 points]

Considérez un électron, de masse 511 keV/c^2, piégé dans un puits infini à deux dimensions qui a des côtés de longueurs égales à $a = 0.060$ nm et $b = a/3 = 0.020$ nm, respectivement.

(a) Dressez un tableau des *quatre* plus bas niveaux d'énergie et indiquez, pour chacun, les valeurs de n_x et n_y, l'énergie du niveau en électron-volts, et le degré de dégénérescence de chaque niveau.

(b) Tracez les courbes de niveaux pour l'état $n_x = 4$ et $n_y = 1$, en indiquant les points (x, y) auxquels on la meilleure chance de trouver cet électron.

Solutions

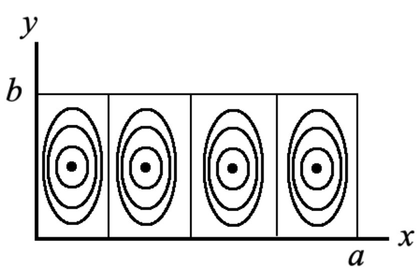
(a) L'énergie du niveau (n_x, n_y) est donnée par

$$E_{n_x,n_y} = \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}\right) = \frac{(hc)^2}{8mc^2a^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{(b/a)^2}\right) = E_0\left(n_x^2 + 9n_y^2\right)$$

où $E_0 = \frac{(hc)^2}{8mc^2a^2} = \frac{(1240)^2}{8(5.11\times10^5)(0.06)^2} = 104.4$ eV. Ceci nous mène au tableau (aucune dégénérescence)

n_x	n_y	E [eV]
1	1	$10E_0$=1044
2	1	$13E_0$=1360
3	1	$18E_0$=1880
4	1	$25E_0$=2610

(b) Les courbes de niveaux pour l'état $n_x = 4$ et $n_y = 1$ sont:



Max à $y = b/2 = 0.010$ nm et $x = a/8 = 0.075$ nm, $3a/8 = 0.225$ nm, $5a/8 = 0.375$ nm, $7a/8 = 0.525$ nm.

Question 13. Nombres quantiques de l'hydrogène [2.5 points]

Quelle est, en termes de $\hbar$, la grandeur $L_{\max}$ du moment angulaire *maximal* d'un électron dans un atome d'hydrogène pour des états avec nombre quantique principal $n = 2$, 20 et 200? Comparez le $L_{\max}$ de chaque niveau n avec la valeur de $L_n = n\hbar$ postulée par le modèle de Bohr. Quelle tendance remarquez-vous?

Solution

Avec $n = 2$, on peut avoir $\ell = 0$ et 1. $L_{\max}$ correspond à $\ell = 1$ et on a $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar = 1.414\hbar$. La valeur postulée est $L_2 = 2\hbar$.
Avec $n = 20$, $L_{\max}$ max correspond à $\ell = 19$ et on a $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{(19)(20)}\hbar = 19.49\hbar$. La valeur postulée est $L_{20} = 20\hbar$.
Avec $n = 200$, $L_{\max}$ correspond à $\ell = 199$ et on a $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{(199)(200)}\hbar = 199.5\hbar$. La valeur postulée est $L_{200} = 200\hbar$. On remarque que la différence relative entre $L_{\max} = \sqrt{(n-1)n}\ \hbar$ et $n\hbar$ diminue quand n est de plus en plus grand.

... suite en p. 9

Question 14. Structure des noyaux [2.5 points]

Considérez des noyaux de rubidium: ${}^{85}_{37}\mathrm{Rb}$.

(a) Combien de protons chaque noyau contient-il?
(b) Combien de neutrons chaque noyau contient-il?
(c) Combien de noyaux de ${}^{85}_{37}\mathrm{Rb}$ y a-t-il dans 1 kg?

Réponses

(a) $\boxed{\text{37 protons}}$
(b) $85 - 37 = \boxed{\text{48 neutrons}}$
(c) Une mole a une masse de 85 g, et, par conséquent, 1 kg contient:

$$1000 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mole}}{85 \text{ g}} \times \frac{6.022 \times 10^{23} \text{ noyaux}}{\text{mole}} = \boxed{7.08 \times 10^{24} \text{ noyaux}}$$

Question 15. Désintégration nucléaire et demi-vie [3.0 points]

Un certain échantillon de 12.0 g de carbone, tiré d'un tissu vivant, se désintègre à un taux de 180.0 désintégrations par minute, en raison du ${}^{14}\mathrm{C}$ radioactif qu'il contient et dont la demi-vie vaut $T_{1/2} = 5730$ années. Quel sera le taux de désintégration (ou 'activité') de cet échantillon dans

(a) 1000 ans?
(b) 50 000 ans?

Solutions

Le taux de désintégration, ou activité, évolue selon la relation

$$\frac{dN}{dt}(t) = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 \exp\left(-\lambda t\right) = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 \exp\left(-t\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\right) = (180)\exp\left(-t\frac{\ln 2}{5730}\right)$$

de sorte que

(a) $\frac{dN}{dt}(1000) = (180)\exp\left(-(1000)\frac{\ln 2}{5730}\right) = \boxed{\text{159 dés./min.}}$
(b) $\frac{dN}{dt}(50 \times 10^3) = (180)\exp\left(-(50000)\frac{\ln 2}{5730}\right) = \boxed{\text{0.425 dés./min.}}$

Question 16. Nombres leptoniques [2.0 points]

Dans les quatre désintégrations suivantes, déterminez si chacun des trois nombres leptoniques, L_e, L_μ et L_τ, est conservé? Expliquez brièvement chaque cas. Un indice absent est dit 'trivial'.

(a) $\mu^- \to e^- + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$
(b) $\tau^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau$
(c) $\pi^+ \to e^+ + \gamma$
(d) $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$

Réponses

(a) $L_\mu : +1 \neq -1, \quad L_e : 0 \neq +1 + 1$, donc $\boxed{L_\mu,\ L_e \text{ non-conservés, } L_\tau \text{ trivial}}$
(b) $L_\tau : +1 = +1, \quad L_e : 0 = +1 - 1$, donc $\boxed{L_\tau,\ L_e \text{ conservés, } L_\mu \text{ trivial}}$
(c) $L_e : 0 \neq -1$, donc $\boxed{L_e \text{ non-conservé, } L_\tau,\ L_\mu \text{ triviaux}}$
(d) $L_e : 0 = +1 - 1$ $\boxed{L_e \text{ conservé, } L_\tau,\ L_\mu \text{ triviaux}}$

... espace pour vos calculs en p. 10

page vide pour vos calculs

Bonne chance et excellentes vacances!