

PHYSQ 208 révision, 9 décembre, 15h local 366

Examen final

Lundi, 19 décembre, de 9 h à midi **au local 366**

<https://sites.ualberta.ca/~mdemonti/physq208.html>

Contient d'anciens examens, ces notes de révision, solutions des devoirs, notes de cours, etc.

Aide-mémoire à la page suivante.

Pour vérifier vos notes: mdemonti@ualberta.ca

Retournez l'aide-mémoire avec votre examen. Vous pouvez compléter le recto et le verso. Vous perdrez 10/40 si vous y avez inclus des solutions ou si vous ne retournez pas l'aide-mémoire avec votre examen. Libre à vous d'ajouter les valeurs de diverses constantes.

$$\beta = \frac{v}{c} \quad E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = K + mc^2 \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$qE = mg \quad K_{max} = eV_0 = hf - \phi \quad f_{cut} = \frac{\phi}{h} \quad hf_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = eV_0$$

$$hf = E_f - E_i \quad hf_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = eV_0 \quad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad E = hf \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{Zke^2}{mr_n}} \quad L_n = mvr = n\hbar \quad E_n = -\frac{Zke^2}{2r_n} = -\frac{Z^2}{n^2} E_R = -\frac{13.6Z^2}{n^2} \quad r_n = \frac{n^2}{Z} \overbrace{\frac{\hbar^2}{ke^2 m}}^{a_B}$$

$$hf = E_n - E_{n'} = Z^2 \overbrace{\frac{m(ke^2)^2}{2\hbar^2}}^{E_R} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \frac{1}{\lambda_{n'n}} = Z^2 R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad R = 1.096776 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$$

$$Z \rightarrow Z - \delta \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \lambda f = \frac{\omega}{k} \quad \Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad P(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$$

$$ka = n\pi \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad p_n = \frac{n\pi\hbar}{a} \quad E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8mc^2 a^2}$$

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right) \quad E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \omega^2 = k/m$$

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, n = 1, 2, \dots \quad L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar, \ell = 0, 1, \dots, n-1 \quad L_z = m_\ell \hbar, m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$$

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad \text{Act} = \left| \frac{dN}{dt} \right| \quad Q = M_x c^2 + M_X c^2 - (M_y c^2 + M_Y c^2) = K_y + K_Y - K_x$$

Matière à examen:

Préalable: chapitre 2, dynamique E , K , \mathbf{p}

Chapitre 3 sauf sec. 3.5

Chapitre 4 sauf sec. 4.2,7

Chapitre 5 sauf sec. 5.1,3

Chapitre 6 sauf sec. 6.2,7

Chapitre 7 sauf sec. 7.4 à 6

Chapitre 12, seulement les sections 12.1,2,6,7

Chapitre 13, seulement les sections 13.1-2,

Chapitre 14, seulement la section 14.4 (nombres quantiques)

Chapitre 2

Relativité restreinte



[Cimetière de trains – Salar d’Uyuni (Bolivie)]

Pour $u \ll c$, E est l'énergie cinétique plus un nouveau terme, très important: mc^2 , l'**énergie de masse** ou **énergie au repos**.

$$\text{Si } u = 0, \text{ alors } E_{u=0} = mc^2 \quad (2.64)$$

La *loi classique de conservation de la masse n'est pas valide* au niveau nucléaire (même si elle est valide en chimie)

Énergie cinétique relativiste

$$K \equiv E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \left(\neq \frac{1}{2}m_\gamma v^2!! \right) \quad (2.58)$$

Exemple: Un neutron ($m = 1.675 \times 10^{-27}$ kg) se déplace à $0.99c$. Calculez (a) son énergie totale, (b) son énergie au repos, (c) son énergie cinétique.

Sec. 2.13 Dynamique relativiste et applications

Les relations $\mathbf{p} = m_\gamma \mathbf{u}$ et $E = m_\gamma c^2$, mènent à

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{u}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E}$$

ainsi que

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.71)$$

L'Eq. (2.71) est l'*invariant fondamental* de la dynamique relativiste.

Chapitre 3

Base expérimentale de la physique quantique



<https://www.fnal.gov/pub/inquiring/timeline/02.html>
Joseph John Thomson découvre l'électron en 1897

Section 3.2 Charge de l'électron

Fig. 3.4

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = -m\vec{g} \quad (3.7)$$

quand $v = 0$. Comme $E = V/d$

$$q = \frac{mgd}{V} \quad (3.8)$$

Comme vous savez,

$$e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$$

En fait, la charge de l'électron est $-e$

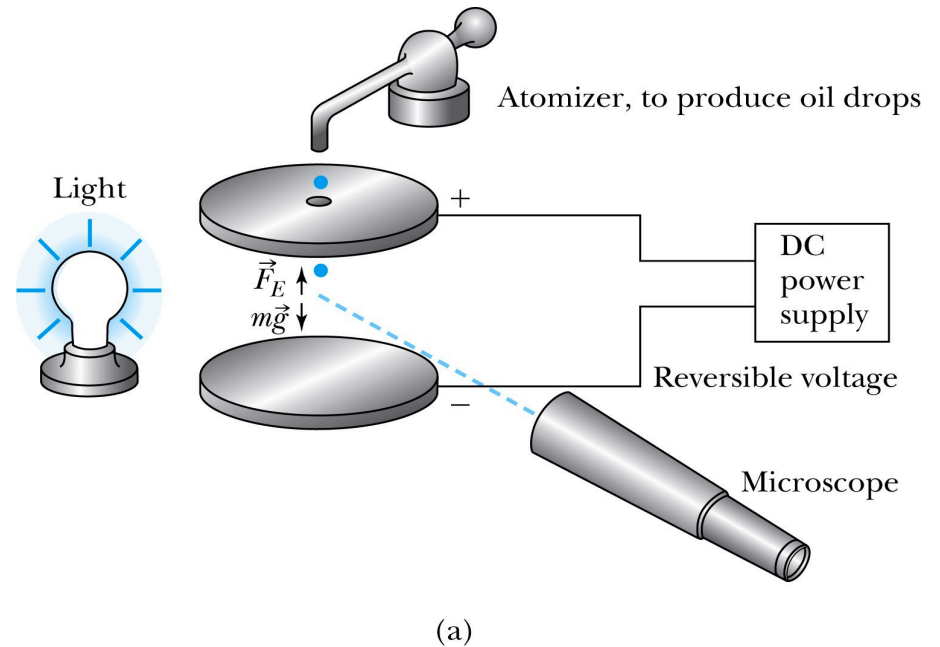


Fig. 3.6. Spectromètre optique

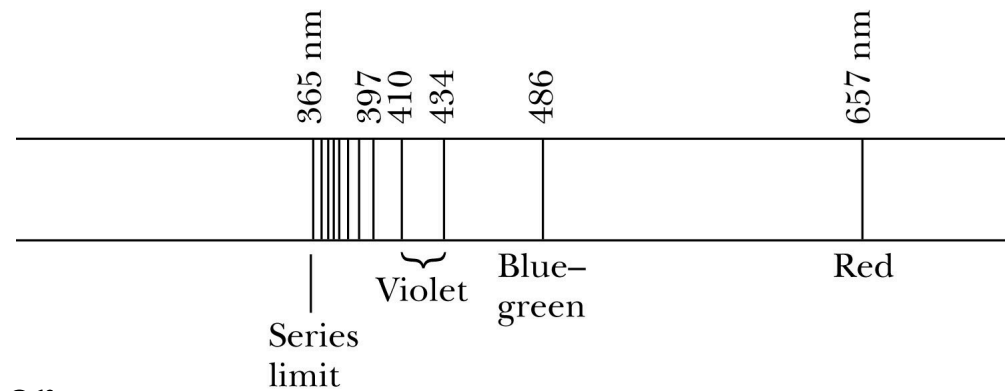
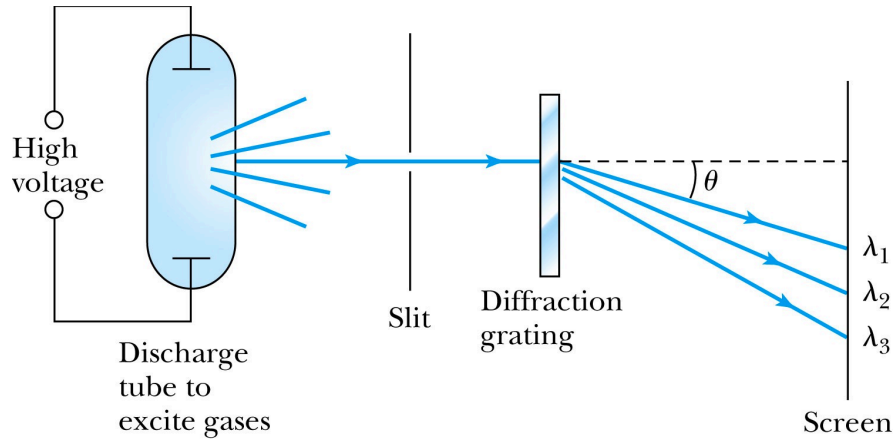


Fig. 3.7 Série de Balmer

Formule de Balmer-Rydberg pour l'hydrogène

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (\text{donne (3.11)})$$

avec la *constante de Rydberg*

$$R = 1.096776 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$$

Généralisation (en nm^{-1})

$$\frac{1}{\lambda_{n'n}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n' < n \text{ entiers} \quad (3.13)$$

Avec les relations $E = hf$ et $v = c = \lambda f$ nous obtenons

$$E_{n'n} = \frac{hc}{\lambda_{n'n}} = hcR \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n' < n$$

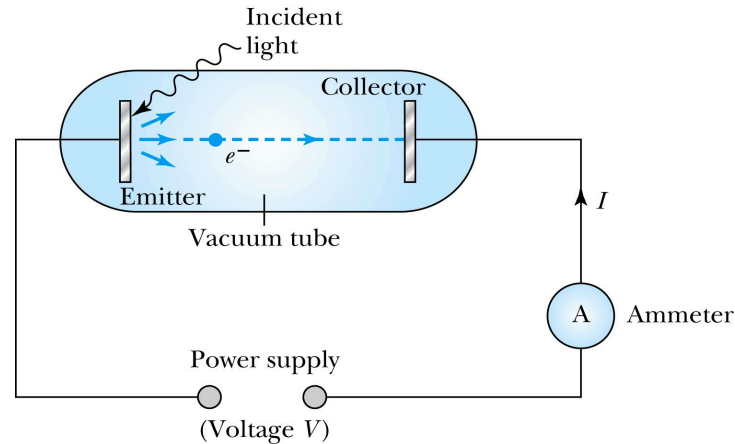
Quelques séries spectrales de l'hydrogène

<i>Nom</i>	n'
Lyman	1
Balmer	2 ($n' = 2$ donne l'Eq. (3.11))
Paschen	3
Brackett	4
Pfund	5

Section 3.6 Effet photoélectrique

Fig. 3.11

$$K_{\max} = hf - \phi$$



Fréquence de seuil f_{cut} à $K_{\max} = 0$, ce qui donne $f_{cut} = \frac{\phi}{h}$
et qui correspond à $\lambda_{\max} = \frac{c}{f_{cut}} = \frac{hc}{\phi}$

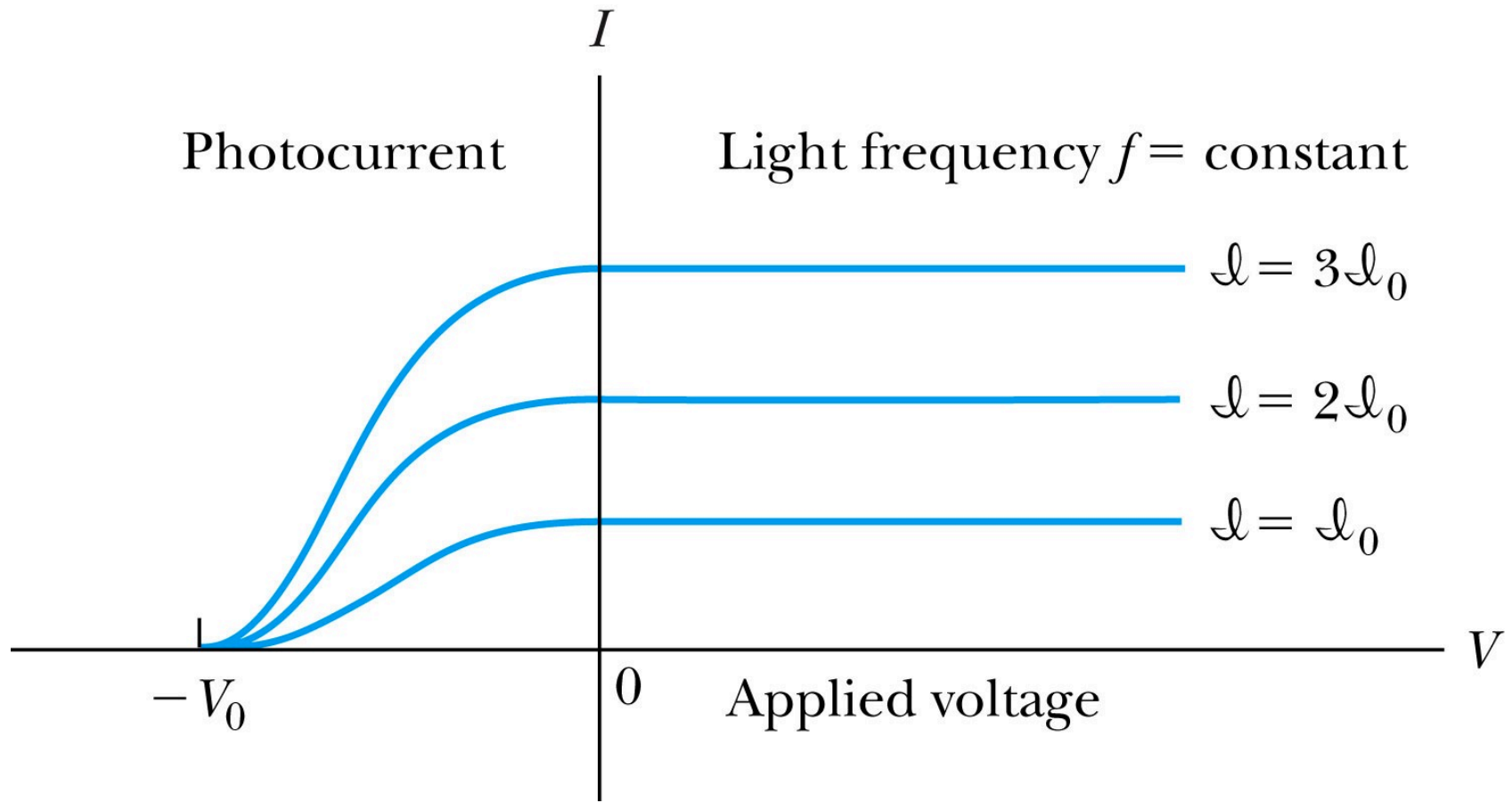


Fig. 3.12 Courant photoélectrique I en fonction de la tension V appliquée entre l'émetteur et le collecteur pour f donné avec trois intensités différentes. Aucun courant ne circule pour un potentiel retardateur plus négatif que $-V_0$. Le photocourant est constant pour $0 \leq V$.

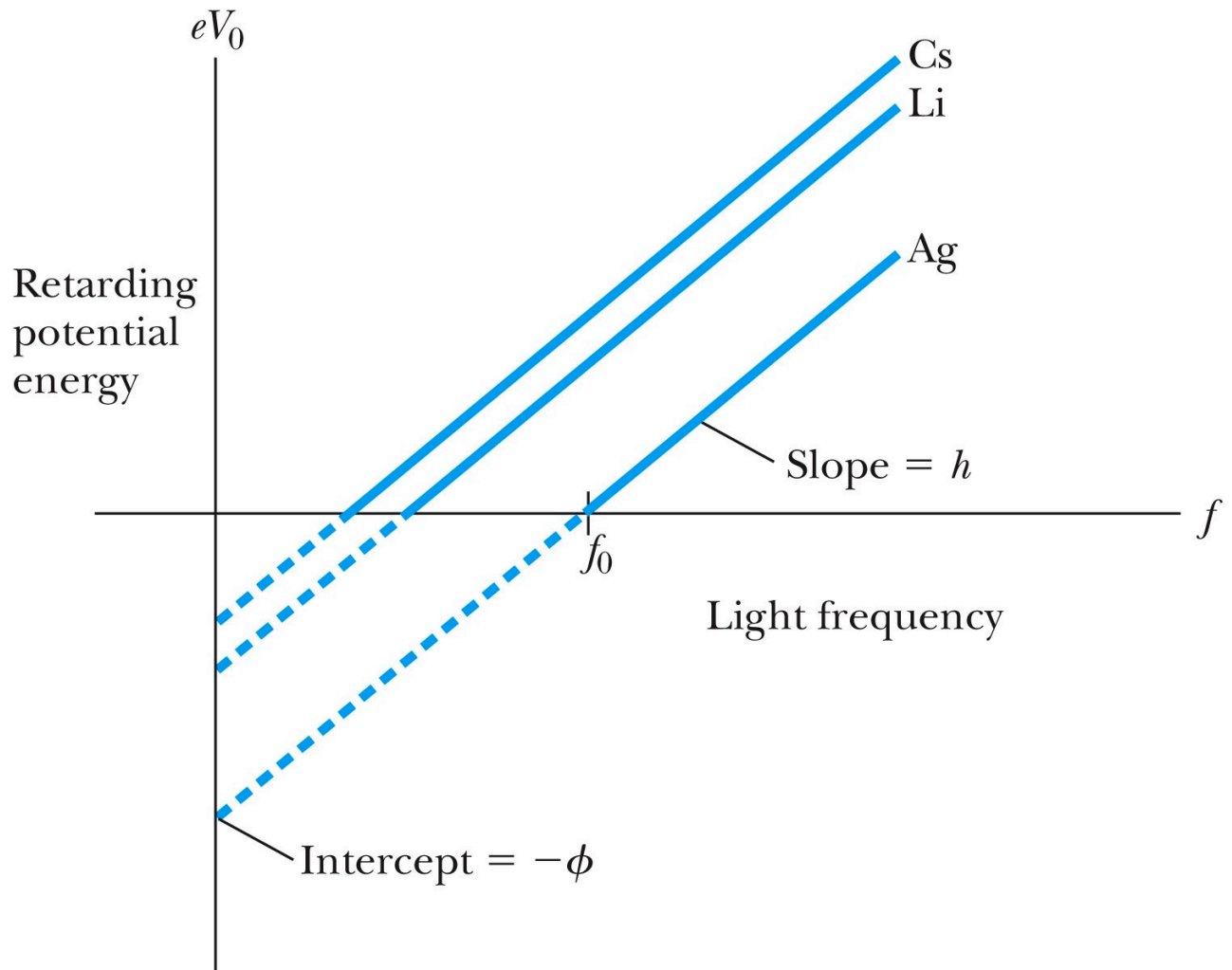


Fig. 3.14 Potentiel retardateur (qui est l'énergie cinétique maximale des photoélectrons en fonction de la fréquence de la lumière pour différents matériaux.

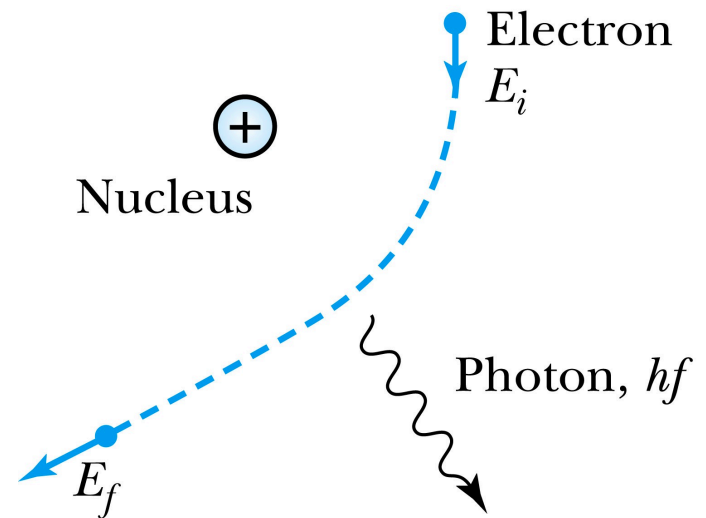
Section 3.7 Production de rayons X

Un peu l'inverse de l'effet photoélectrique (un photon cède de l'énergie à un électron), les rayons X sont produits par de l'énergie transmise de particules chargées à un photon. *Bremsstrahlung* (“rayonnement de freinage” en Allemand) est le procédé par lequel des photons sont émis par le ralentissement d'une particule chargée.

Fig. 3.17

Par la conservation d'énergie:

$$hf = E_f - E_i \quad (3.36)$$



De la théorie classique, on s'attend à

- une distribution continue de l'intensité en fonction de la fréquence f ,
- l'intensité tend vers zéro quand f tend vers l'infini

Mais nous observons des *pics* et une *fréquence d'arrêt*.

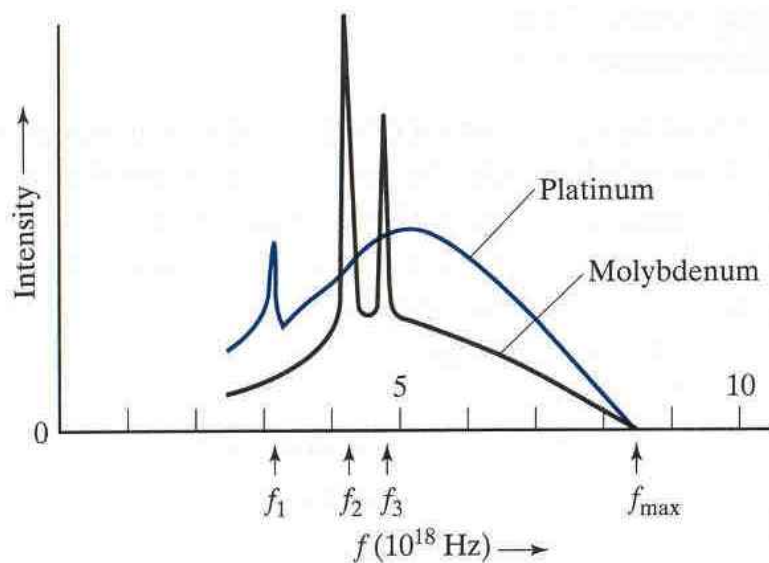


FIGURE 4.11

X-ray spectra produced by platinum and molybdenum anodes, both made with an accelerating potential of 35 kV. Note how both spectra terminate abruptly at the same frequency, f_{max} .

Loi de Duane-Hunt

$$hf_{\max} = K = eV_0$$

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV_0 \rightarrow \lambda_{\min} = \frac{hc}{eV_0} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{eV_0} \quad (3.37)$$

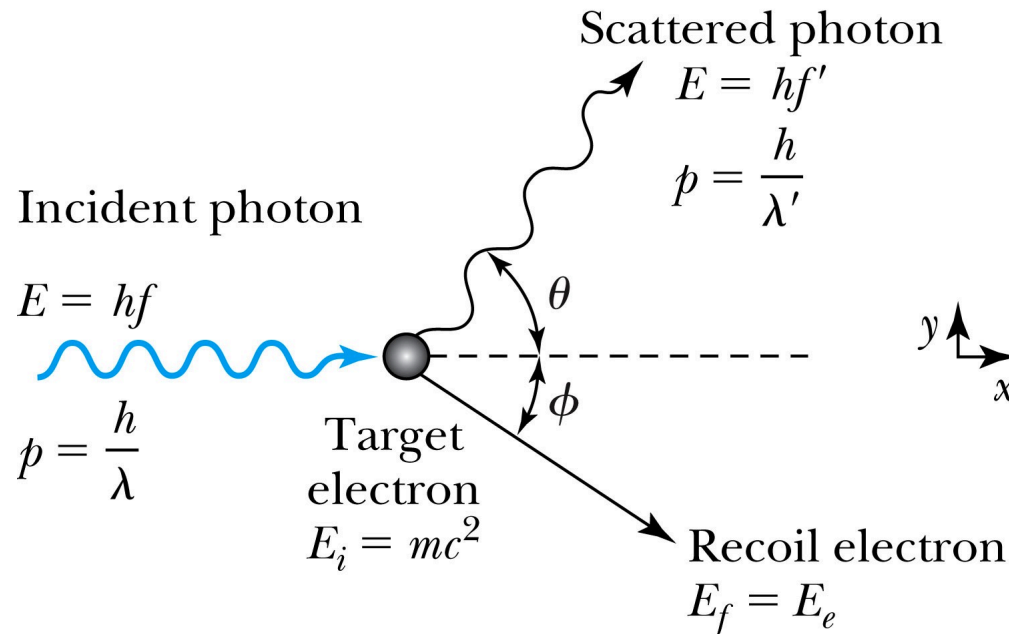
Confirme la relation d'Einstein: $E = hf$

Section 3.8 Effet Compton

L'*effet Compton* décrit une forme d'interaction entre un photon et un électron. La théorie classique de la *diffusion de Thomson* affirmait qu'un électron oscillerait à la fréquence du photon et aurait ré-émis à la même fréquence.

Compton a observé que la fréquence du photon change, car dans le contexte quantique, il faut le considérer comme un particule de $p = h/\lambda$.

Fig. 3.20



Photon : $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ avec $m = 0$ donne

$E = pc$ et donc $p =$

En appliquant la conservation de

énergie (3.40a)

p_x (3.40b)

p_y (3.40c)

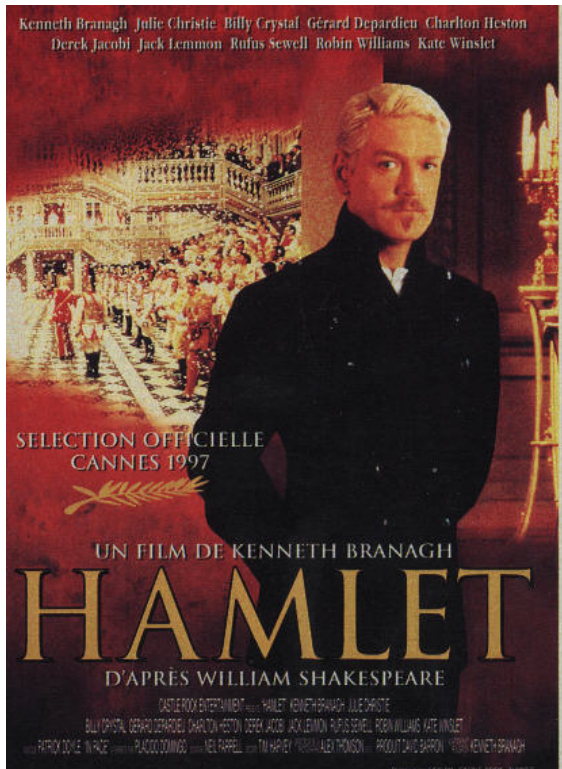
Nous obtenons la *formule de Compton*

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (3.42)$$

Comme le photon perd de l'énergie, sa longueur d'onde augmente.

Dualité ondes-corpuscules

$$E = hf \quad \text{et} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$



Si $m = 0$ (photons), on a

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \rightarrow E = pc$$

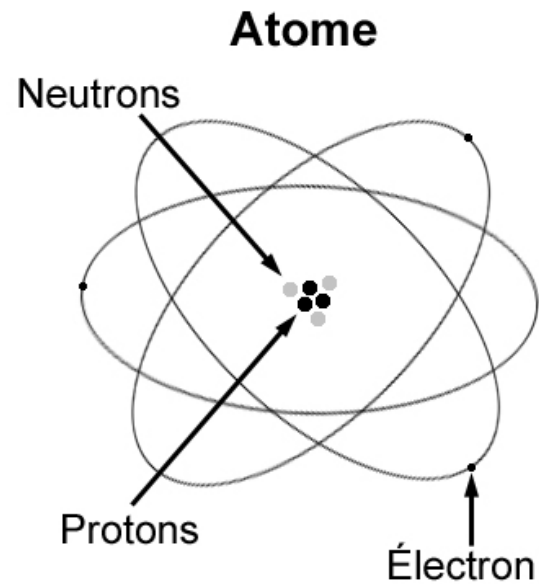
et les équations sont dépendantes.

Mais si $m \neq 0$ les deux équations sont indépendantes et requises.

Onde ou particule, telle est la question..

Chapitre 4

Structure de l'atome (bref)



Sections 4.4-5 Atome d'hydrogène de Bohr

Hypothèses (p. 142)

A. Électrons dans des *états stationnaires* sans rayonnement d'énergie et avec une énergie totale définie.

B. Émission ou absorption de lumière lorsqu'un électron passe d'un niveau à l'autre. Fréquence donnée par

$$hf = E = E_1 - E_2$$

E, hf : photon, E_1, E_2 : atome

C. Équilibre dynamique du système d'états stationnaires soumis aux lois de la physique classique. Mais ces lois ne s'appliquent pas aux transitions entre états stationnaires.

D. Le moment cinétique de l'électron ne peut prendre que des valeurs entières multiples de

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

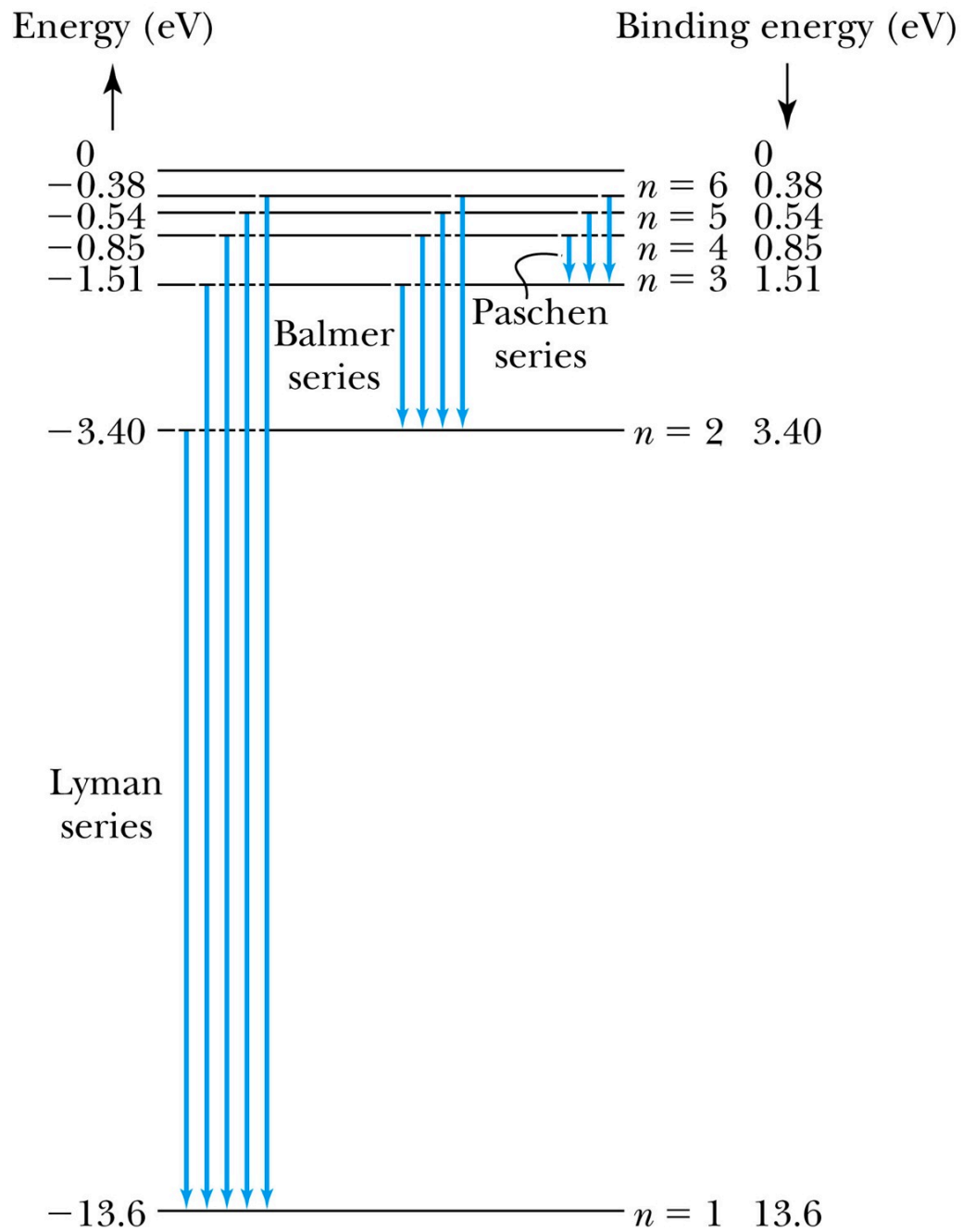
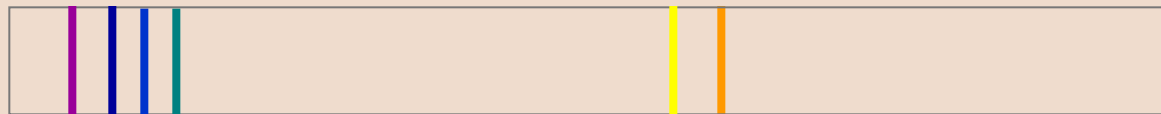


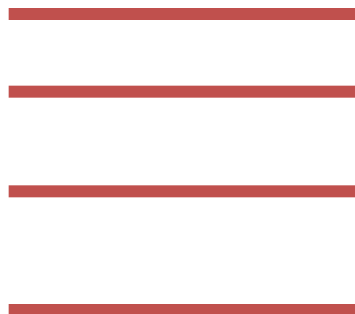
Fig. 4.16

Question 31.4b Energy Levels II

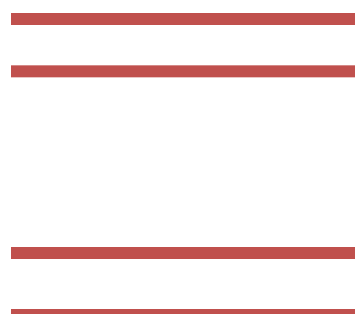


The emission spectrum for the atoms of a gas is shown. Which of the energy level diagrams below corresponds to this spectrum?

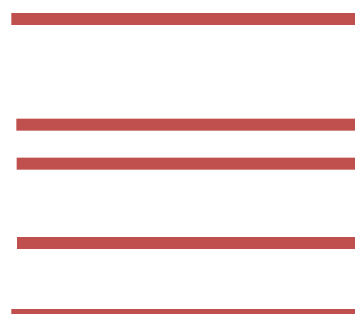
a)



b)



c)



d)



Atome hydrogénoïde (Hydrogen-line atom) atome auquel il ne reste qu'un électron. Similaire à l'hydrogène, avec un *noyau de charge Ze*

Orbite circulaire dans un champ électrostatique

$$\sum F = ma \rightarrow \frac{Zke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad mv^2 = \frac{Zke^2}{r}$$

Donc, la U pour amener un électron de l'infini à une distance r du proton, nous avons

$$U = (-e)V = (-e)\frac{Zke}{r} = -\frac{Zke^2}{r}$$

Énergie totale du système:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Zke^2}{r} = -\frac{Zke^2}{2r}$$

Moment cinétique quantifié $L = mvr = n\hbar$

mène à $v_n = \frac{n\hbar}{mr}$, qui, remplacé dans $mv^2 = \frac{Zke^2}{r}$, donne

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{Z ke^2 m} = \frac{n^2}{Z} a_B$$

En substituant cette expression dans

$$E = -\frac{Zke^2}{2r_n}$$

on obtient
$$E_n = -\frac{Z^2 k^2 e^4 m}{2n^2 \hbar^2} = -\frac{Z^2 k e^2}{n^2 2a_B}$$

qui devient
$$E_n = -Z^2 \frac{E_R}{n^2}$$

avec E_R déjà défini à l'Eq. (4.26).

Exemple: $r = ?$ avec $n = 1$ pour O^{7+} ? E et $\lambda = ?$ pour les photons dans la ligne α de Lyman du O^{7+} ?

Exemple: Initialement le spectre du He^+ a été confondu avec le H. (a) Montrez que les lignes alternées de Balmer du He^+ correspondent aux lignes de Lyman de H. (b) Montrez qu'on pourrait interpréter (incorrectement!) les lignes de He^+ comme des lignes de H avec n et n' entiers et demi-entiers.

Section 4.6 Spectres caractéristiques en rayons X

Loi de Moseley : relation entre la *fréquence* des rayons X émis et le *nombre atomique* Z des atomes avec lesquels les électrons entrent en collision:

$$\sqrt{f} \propto Z$$

Selon Moseley, au cours de la production de rayons X, les électrons incidents éjectent un ou plusieurs électrons de l'anode, constituée d'atomes à multi-électrons. Ces électrons laissent un trou dans le niveau n' , comblé par un électron de niveau n . La transition du nouvel électron du niveau n au niveau n' , provoque l'émission de rayons X. La fréquence des rayons X est donnée par

$$hf = E_{n'n} = Z^2 \overbrace{\frac{m(k e^2)^2}{2\hbar^2}}^{E_R} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n' < n$$

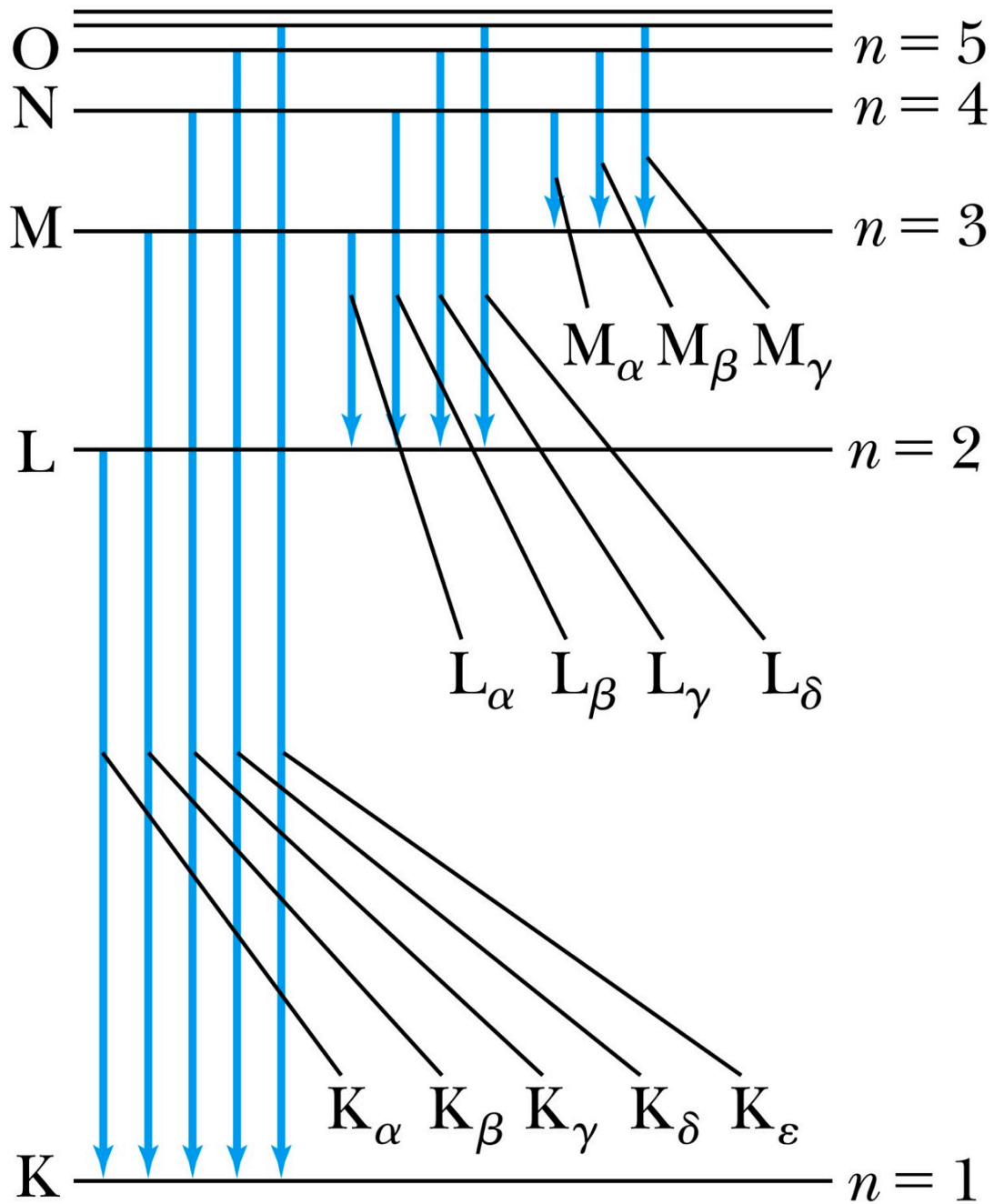
En réalité, la présence d'autres électrons réduit l'attraction du noyau positif, de sorte qu'on peut remplacer Z par $Z - \delta$ pour obtenir

$$E_\gamma = (Z - \delta)^2 \overbrace{\frac{m(k e^2)^2}{2\hbar^2}}^{E_R} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n' < n$$

Par exemple, si $n' = 1$ et $n = 2$, cette équation devient

$$E_\gamma = \frac{3}{4} (Z - \delta)^2 E_R$$

C'est la série K_α .

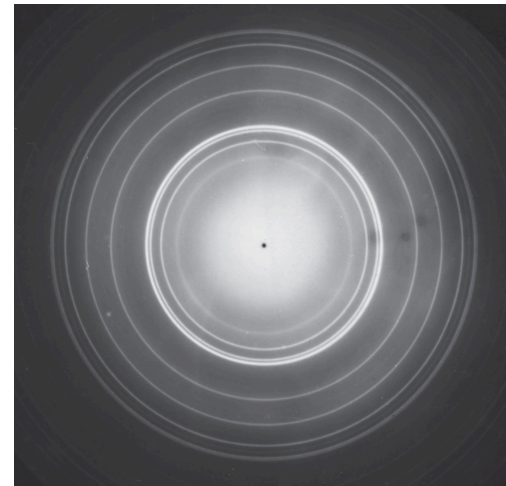


Chapitre 5

Mécanique quantique I - propriétés ondulatoires de la matière



(a)



(b)

Fig 5.12. Diffraction électronique

Section 5.2 Ondes de de Broglie

Relations de de Broglie-Einstein

$$E = hf, \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (5.2)$$

Remarque :

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

n'est compatible avec la relation $\lambda f = c$ que pour des particules de masse nulle. En fait, nous obtenons la *relation de dispersion*

$$(hf)^2 = \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + (mc^2)^2$$

Bref, si $m = 0$, une des deux relations (5.2) est suffisante. Si $m \neq 0$, comme les constituants de la matière (électrons, protons, etc.), il faut utiliser les deux relations (5.2).

Exemple. Un électron ($m = 511 \text{ keV}/c^2$) a vitesse $v = 0.8c$. Calculez f et λ . Est-ce que $f\lambda = 0.8c$?

Section 5.4 Mouvement ondulatoire

Exemples d'ondes: corde ($y(x,t)$), eau ($z(x,y,t)$), son ($P(x,y,z,t)$), électromagnétisme ($\mathbf{E}(x,y,z,t)$, $\mathbf{B}(x,y,z,t)$), etc.

En physique quantique, la *fonction d'onde*

$$\Psi(\vec{r}, t)$$

décrit l'*amplitude de probabilité* de la particule décrite.

M Born (ou “interprétation de Copenhague”)

La probabilité de présence est donnée par le carré de l'amplitude de probabilité (qui est un nombre complexe...)

Rappel – ondes sinusoïdales

Une fonction $y = f(x)$ se déplaçant à vitesse v est décrite par

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Ici, nous considérons la fonction

$$y(x) = \sin(kx)$$

qui a la *longueur d'onde* (ou “période spatiale”)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.14)$$

L'onde progressive sinusoïdale a la forme

$$y(x) = \sin[k(x - vt)]$$

que nous pouvons écrire comme

$$y(x,t) = \sin(kx - kv t)$$

En une position fixe x (par ex. $x = 0$), cette fonction représente un point qui oscille avec une période T donnée par

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2\pi}{v} = \frac{1}{f} \quad (5.14)$$

On voit que la fréquence angulaire est donnée par

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = kv$$

Remarquez aussi que

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} \quad (5.17)$$

Avec les relations de de Broglie, Eq. (5.2), nous obtenons

$$E = hf = \hbar\omega$$

et

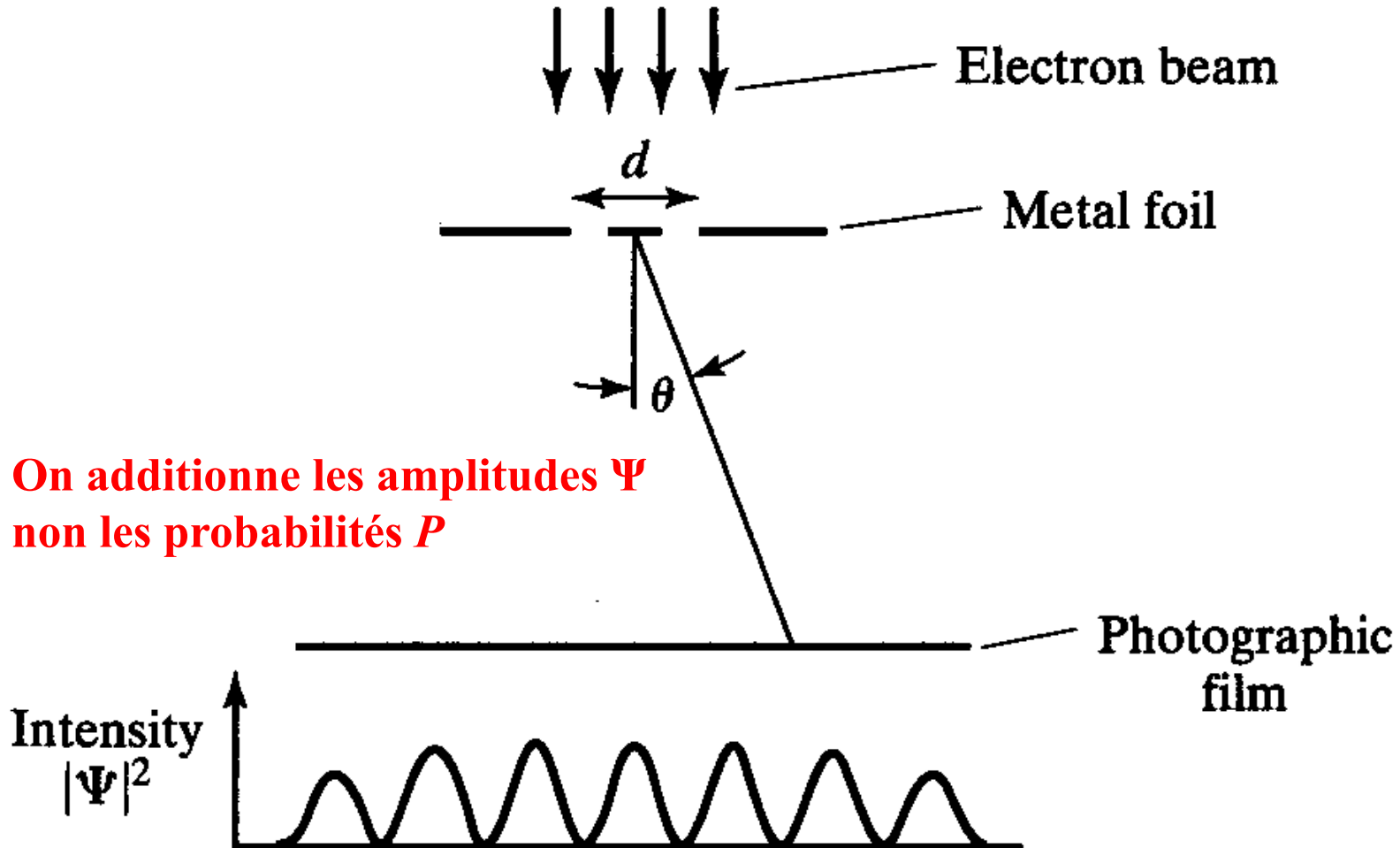
$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Exemple Une onde $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ a $k = 6$ rad/m et $\omega = 22$ rad/s. Trouvez λ , f et v .

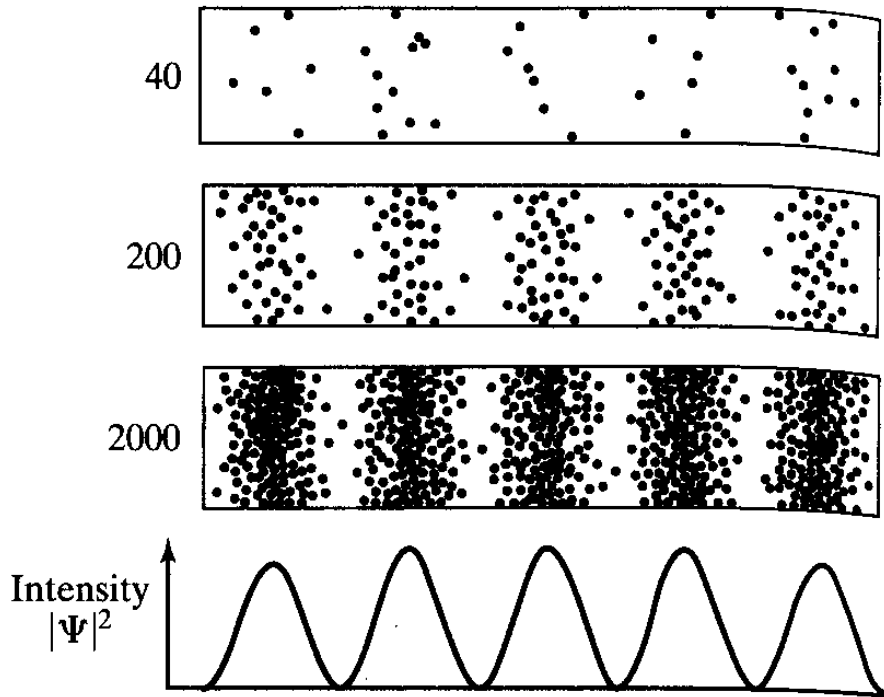
Exemple Trouvez λ et k pour des électrons avec $K = 300$ eV.

Section 5.5 Ondes ou particules?

Expérience à deux fentes - cas des électrons



Simulation de l'expérience de Young pour de la lumière (vue comme des photons) ou des électrons pour $n = 40, 200$ et 2000 . Le patron d'interférence apparaît lorsque n augmente, tandis que pour de petits n le comportement est corpusculaire.



Section 5.6 Principe d'incertitude

Il est impossible de déterminer simultanément la position et la quantité de mouvement:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2 \quad (5.40)$$

Relié au principe de complémentarité car connaître p (et k , λ) correspond à une onde sinusoïdale pure, tandis que connaître x correspond à un corpuscule.

De façon analogue, il est impossible de déterminer simultanément la durée d'une impulsion et son énergie:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (5.45)$$

Chapitre 6

Mécanique quantique II – Équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V\Psi(x, t)$$

La définition classique de l'énergie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{p^2}{2m} + U$$

mène à l'*équation de Schrödinger dépendante du temps*

$$\hat{H}\Psi(x,t) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x) \right) \Psi(x,t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x,t) \quad (6.1)$$

Exercice: Obtenez l'équation d'onde qui correspond à la formule relativiste $E^2 = (pc)^2 + m^2c^4$; on l'appelle équation de *Klein-Gordon*. Un autre équation relativiste est l'équation de *Dirac*.

Équation de Schrödinger (indépendante de t)

En substituant

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t} = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (6.15)$$

dans l'Eq. (6.1), nous voyons que $\psi(x)$ est une solution de

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) \quad (6.13)$$

Il s'agit de l'*équation de Schrödinger indépendante du temps*. Pour un potentiel $U(x)$ donné, les solutions des états stationnaires, $\psi(x)$, donnent les *amplitudes de probabilité*.

Dans une onde stationnaire, certains points sont toujours au repos: les *noeuds*. Pour une corde attachée aux deux bouts, les extrémités sont des noeuds.

Équation – onde stationnaire

$$\Psi(x, t) = A \sin kx \cos \omega t \quad (*)$$

Une corde de longueur a contient une onde stationnaire si

$$\lambda = \frac{2a}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

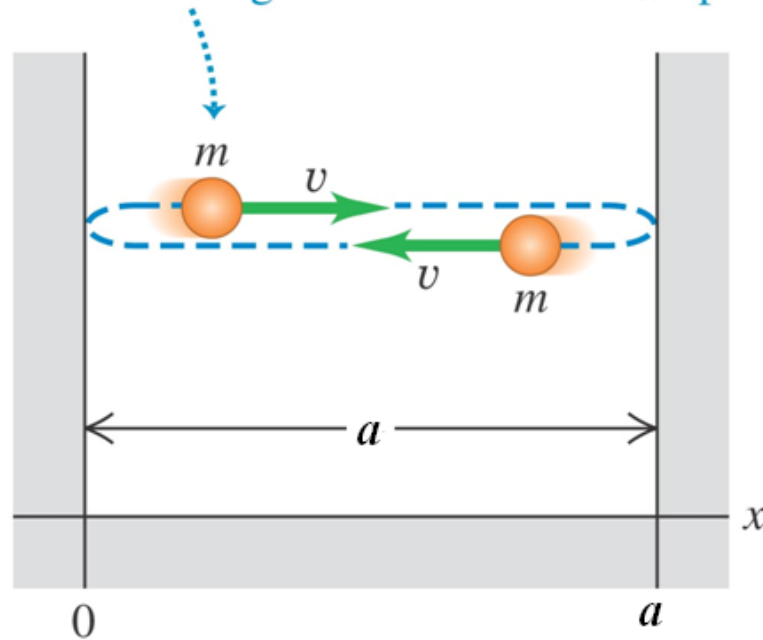
qui implique

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{a}$$

Sec. 6.3 Puits de potentiel infini

Cas classique

A particle with mass m moves along a straight line at constant speed, bouncing between two rigid walls a distance a apart.



Nous cherchons des solutions de l'Eq. (6.13), avec les *conditions aux limites*

$$\psi(0) = \psi(a) = 0$$

Pour $0 < x < a$, l'Eq. (6.13) devient

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \quad (*)$$

Solution de la forme

$$\psi(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad (**)$$

α complexe

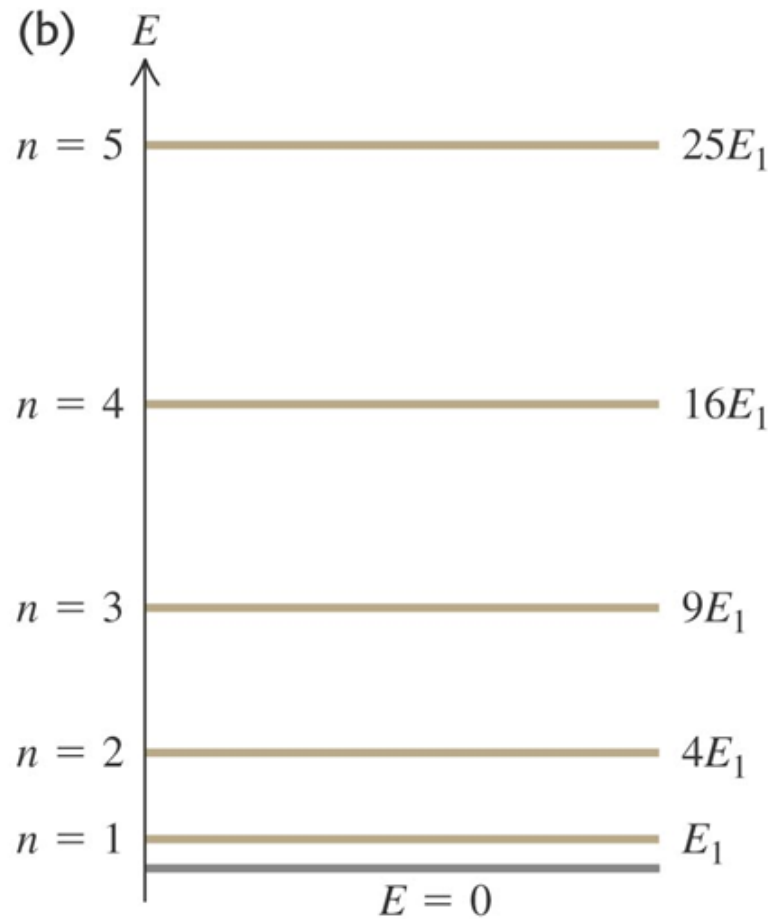
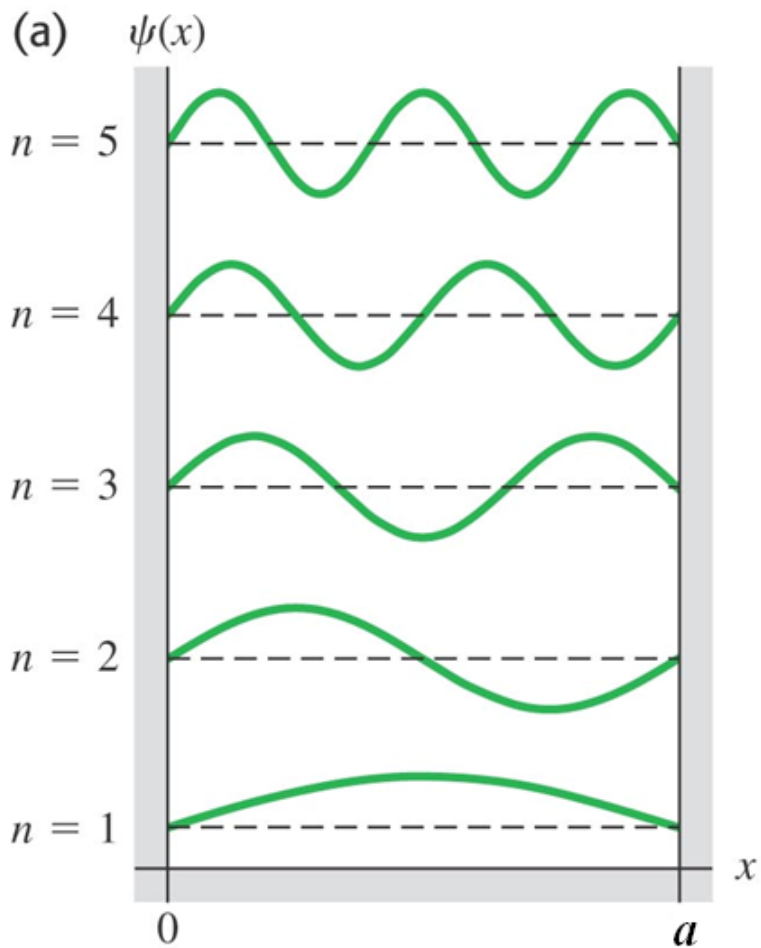
Résumé – puits de potentiel infini

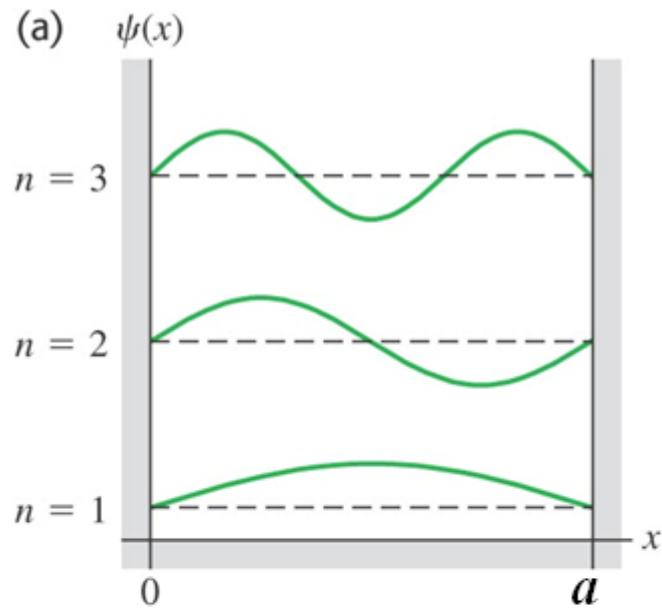
Fonction d'onde $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$

Quant de mvt $p_n = \frac{n\pi\hbar}{a}$

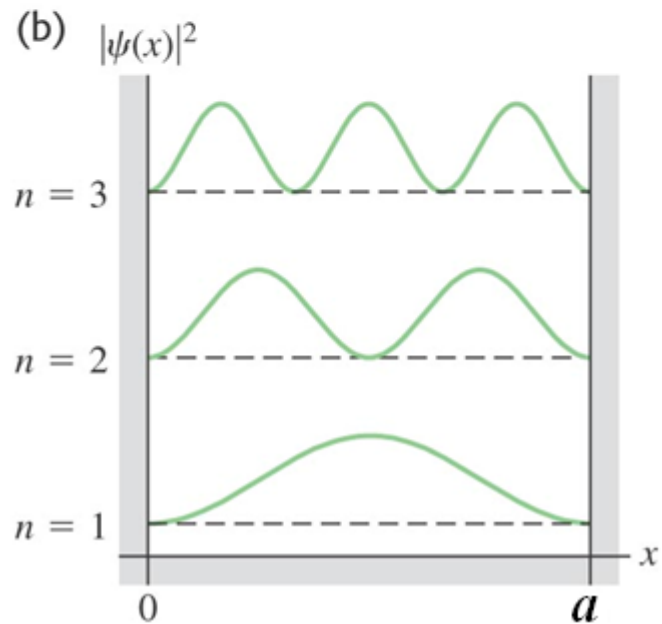
Énergie $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)a^2}$

où $n = 1, 2, 3, \text{ etc.}$, $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$, mc^2 en eV et a en nm.





Fonction d'onde = amplitude de probabilité



Densité de probabilité correspondante

Sec. 6.4 Puits de profondeur finie

Soit $U(x)$ donné par

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ U_0 & x < 0 \text{ et } x > a \end{cases}$$

Voir Fig. (b). Plus utile en pratique que le puits infini (Fig. (a)). Le puits arrondi de la Fig. (c) est encore plus réaliste.

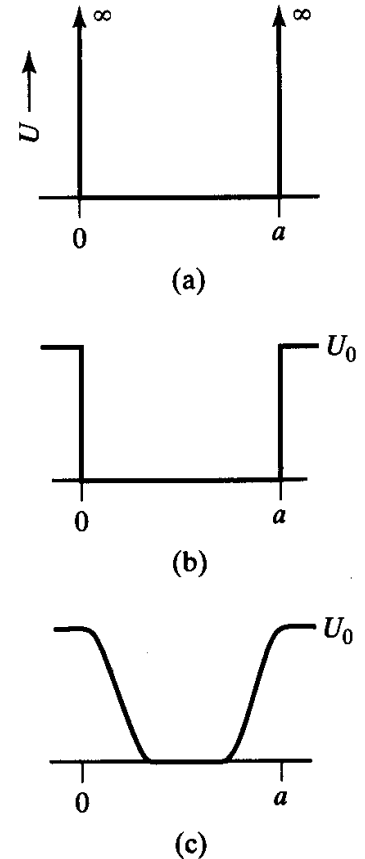
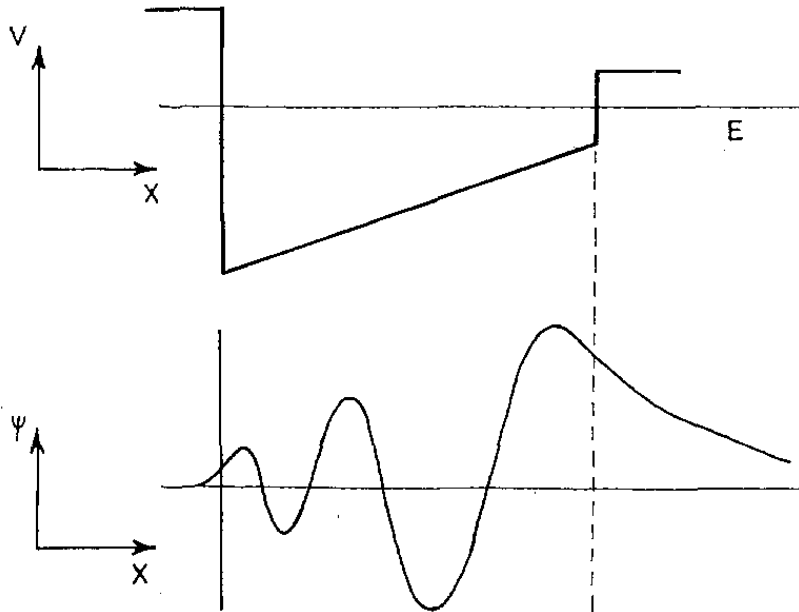


FIGURE 7.8

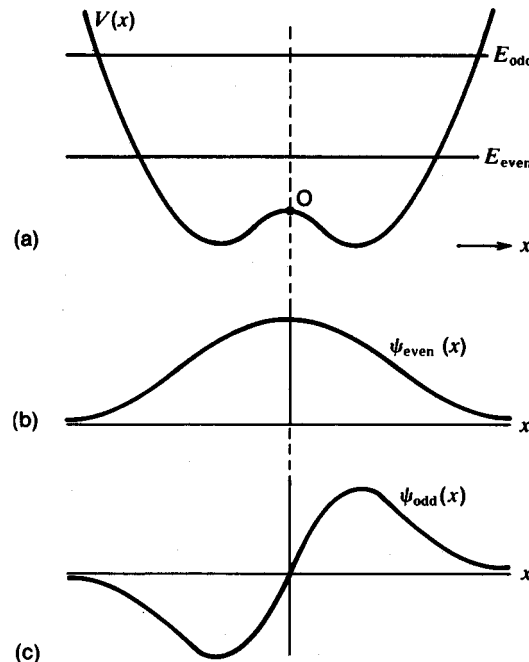
Three potential wells: (a) the infinite well (7.79); (b) the finite square well (7.80); (c) a finite rounded well.

Tracés qualitatifs de fonctions d'onde – potentiel général

- La fonction du niveau n a $n - 1$ noeuds
- Quand $E > U$, la “longueur d'onde locale” est plus grande dans les régions moins profondes
- Quand $E > U$, “l'amplitude locale” est plus grande dans les régions moins profondes



- Quand $E < U$, la décroissance est plus rapide lorsque $U - E$ est plus grand
- Si $U(x)$ présente une certaine symétrie, les fonctions d'onde seront symétriques ou anti-symétriques par rapport au point de symétrie.



Sec. 6.5 Puit infini à 2 et 3 dimensions

La dérivée, $\frac{d}{dx}$, est généralisée au **gradient** :

$$\nabla(\dots) \equiv \hat{i} \frac{\partial \dots}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \dots}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \dots}{\partial z}$$

Ceci implique, entre autres, que la dérivée seconde devient

$$\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Solutions

$$X(x) = B \sin k_x x \quad \text{et} \quad Y(y) = C \sin k_y y$$

où

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a} \quad \text{et} \quad k_y = \frac{n_y \pi}{b}$$

avec $n_x, n_y = 1, 2, 3, \dots$

Solution finale

$$\psi(x, y) = A \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b}$$

Niveaux d'énergie

$$E = E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2M} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right) = E_0 \left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \right)$$

avec la définition

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2Ma^2}$$

Cas $a = b$

n_x	n_y	E_{n_x, n_y}	Degeneracy
1	3	$10E_0$	2
3	1		
2	2	$8E_0$	1
1	2	$5E_0$	2
2	1		
1	1	$2E_0$	1
		$E = 0$	

Dégénérescence:

plusieurs états ont la même énergie

Exemple Dressez un tableau semblable à la page précédente pour un puit infini 2D *carré* avec n_x et n_y , E et dégénérescence des huit premiers niveaux.

Exemple Même question pour les six premiers niveaux d'énergie d'une boîte de dimensions a et $b = a/2$.

L'énergie d'une particule dans une boîte de dimensions a , b , c sont

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2M} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

Exemple Même question pour une boîte cubique de côtés égaux à a .

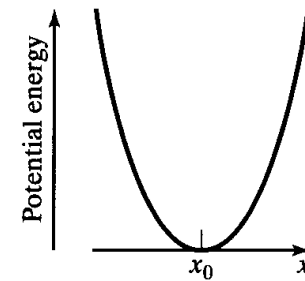
Sec. 6.6 Oscillateur harmonique simple

Très important pour les applications de la mécanique quantique, et pour le développement de la théorie quantique des champs.

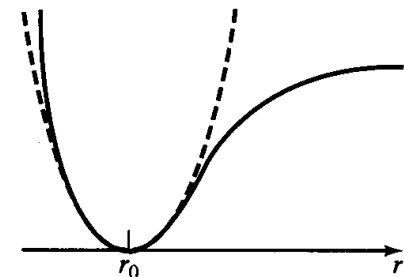
$$\text{Potentiel } U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Équation de Schrödinger

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2}kx^2 - E \right) \psi(x) \quad (6.54)$$



(a)



(b)

FIGURE 7.18

(a) The potential energy of an ideal simple harmonic oscillator is a parabola. **(b)** The potential energy of a typical diatomic molecule (solid curve) is well approximated by that of an SHO (dashed curve) when r is close to its equilibrium value r_0 .

Une solution détaillée montre que les énergies sont

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c = \frac{1}{2} \hbar \omega_c, \frac{3}{2} \hbar \omega_c, \frac{5}{2} \hbar \omega_c, \dots \quad (6.58)$$

$$\omega_c = \sqrt{k/m}$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et

TABLE 7.1

The energies and wave functions of the first three levels of a quantum harmonic oscillator. The length b is defined as $\sqrt{\hbar/m\omega_c}$.

n	E_n	$\psi(x)$
0	$\frac{1}{2} \hbar \omega_c$	$A_0 e^{-x^2/2b^2}$
1	$\frac{3}{2} \hbar \omega_c$	$A_1 \frac{x}{b} e^{-x^2/2b^2}$
2	$\frac{5}{2} \hbar \omega_c$	$A_2 \left(1 - 2 \frac{x^2}{b^2} \right) e^{-x^2/2b^2}$

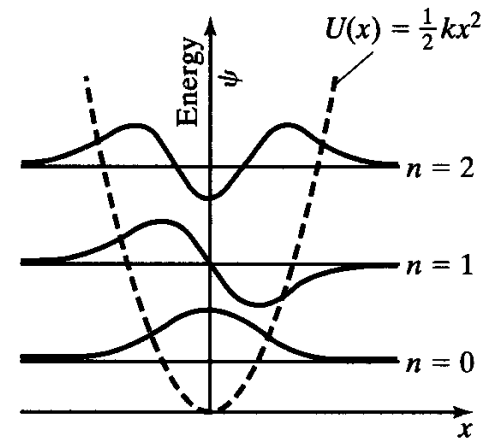
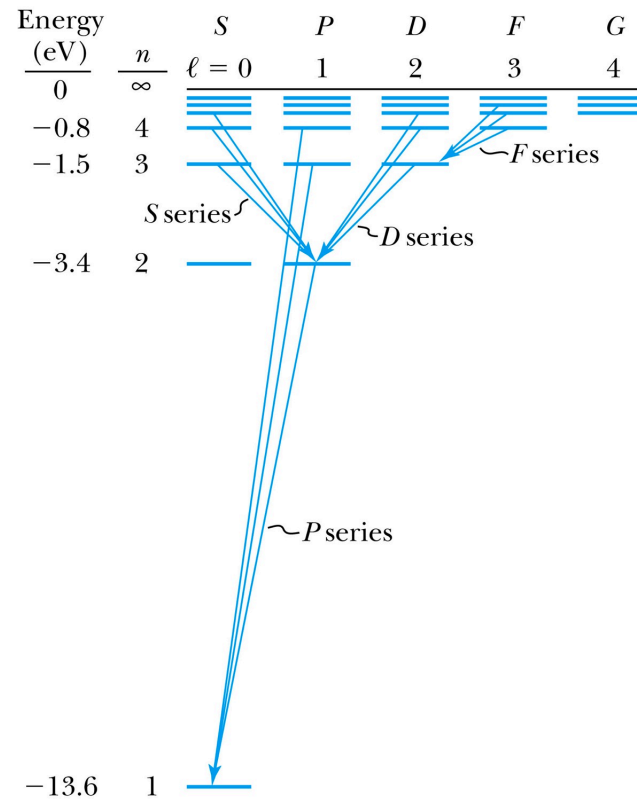


FIGURE 7.19

The first three energy levels and wave functions of the simple harmonic oscillator.

Chapitre 7

L'atome d'hydrogène



Équation de Schrödinger à 3D en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (7.3)$$

Pour résoudre, on utilise la *méthode de séparation des variables* en écrivant

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)f(\theta)g(\phi) \quad (7.4)$$

Les tableaux 7.1 et 7.2 contiennent les solutions sous la forme

$$\psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi) \quad (7.17)$$

Les entiers n , ℓ et m_ℓ sont des *nombres quantiques*, décrits à la section 7.3.

Table 7.1 Hydrogen Atom Radial Wave Functions

n	ℓ	$R_{n\ell}(r)$
1	0	$\frac{2}{(a_0)^{3/2}} e^{-r/a_0}$
2	0	$\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{e^{-r/2a_0}}{(2a_0)^{3/2}}$
2	1	$\frac{r}{a_0} \frac{e^{-r/2a_0}}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}$
3	0	$\frac{1}{(a_0)^{3/2}} \frac{2}{81\sqrt{3}} \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$
3	1	$\frac{1}{(a_0)^{3/2}} \frac{4}{81\sqrt{6}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$
3	2	$\frac{1}{(a_0)^{3/2}} \frac{4}{81\sqrt{30}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$

Table 7.2 Normalized Spherical Harmonics $Y(\theta, \phi)$

ℓ	m_ℓ	$Y_{\ell m_\ell}$
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$
1	± 1	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
2	0	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3 \cos^2 \theta - 1)$
2	± 1	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$
2	± 2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$
3	0	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
3	± 1	$\mp \frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \sin \theta(5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$
3	± 2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$
3	± 3	$\mp \frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$

Sec. 7.3 Nombres quantiques

***n** nombre quantique principal*

$$E_n = \frac{-\mu}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2} \quad (7.21)$$

où $n = 1, 2, 3, \dots$ sert à déterminer l'énergie.

***ℓ** nombre quantique azimuthal*

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \quad (7.22)$$

où $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ sert à déterminer le moment cinétique.

m_ℓ nombre quantique magnétique

$$L_z = m_\ell \hbar \quad (7.23)$$

où $m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$ représente la composante du moment cinétique sur l'axe z .

Fig. 7.3

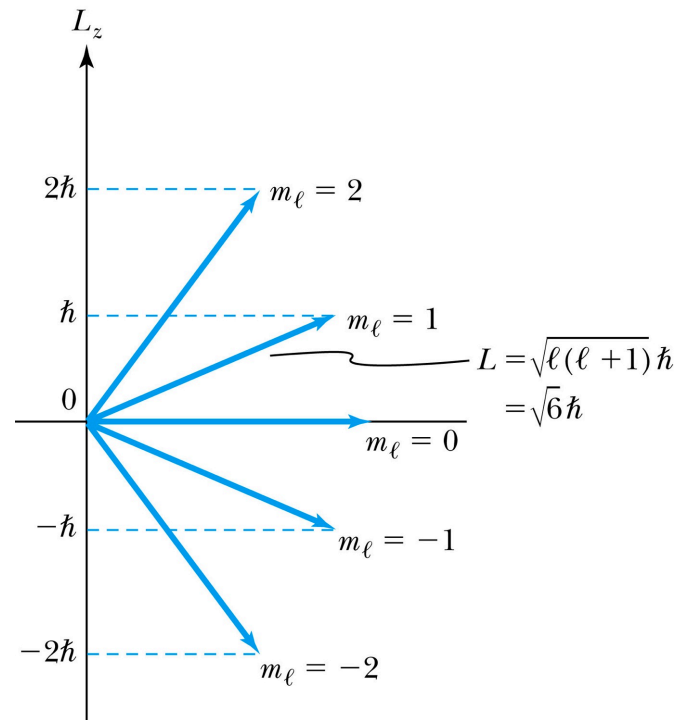
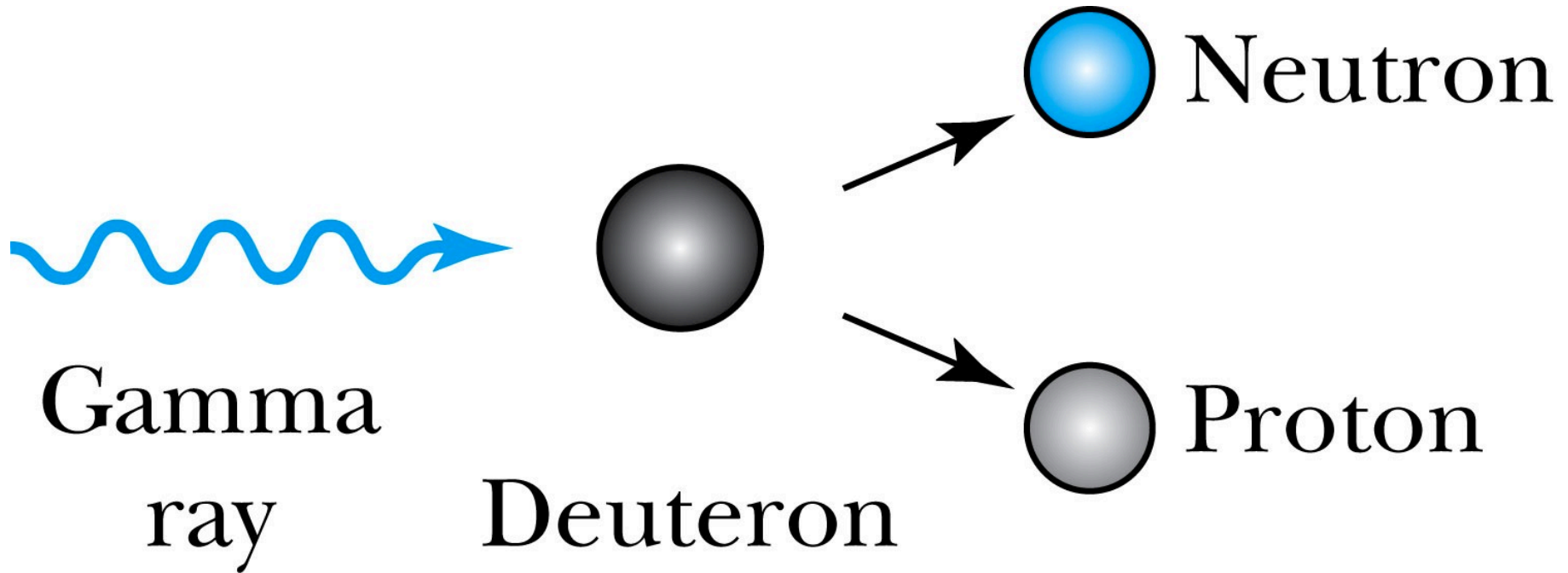


Diagramme d'énergie pour $n \leq 4$

Quantum number l :	0	1	2	3	
Magnitude L :	0	$\sqrt{2}\hbar$	$\sqrt{6}\hbar$	$\sqrt{12}\hbar$	
Code letter:	s	p	d	f	
$E = 0$ <hr style="display: inline-block; width: 550px; vertical-align: middle;"/>					
\uparrow Energy	$E_4 = -E_R/16$	$\frac{4s}{(1)}$	$\frac{4p}{(3)}$	$\frac{4d}{(5)}$	$\frac{4f}{(7)}$
$E_3 = -E_R/9$	$\frac{3s}{(1)}$	$\frac{3p}{(3)}$	$\frac{3d}{(5)}$		
$E_2 = -E_R/4$ $= -3.4 \text{ eV}$	$\frac{2s}{(1)}$	$\frac{2p}{(3)}$			
$E_1 = -E_R$ $= -13.6 \text{ eV}$	$\frac{1s}{(1)}$				

Chapitres 12-14

Noyaux et particules



Sec. 12.2 Propriétés des noyaux

Structure des noyaux



Noyau ${}^A_Z X$ ou $X(A,Z)$

Z : numéro atomique = # de protons, ce qui détermine l'élément X

A : nombre de masse = # de nucléons ($p + n$) \approx masse molaire en g/mol

N : nombre de neutrons = $A - Z$

Rayon d'un noyau ${}^A_Z X$ $R \cong (1.2 \times 10^{-15} \text{ m})A^{1/3}$

Unité de longueur : 1 femtomètre (fm) ou fermi = 10^{-15} m

Les noyaux ne sont pas exactement sphériques.

Exemple: Rayons de noyaux de $A = 1$ et 290 valent 1.2 fm à 7.9 fm

Exemple: Densité d'un noyau $A = 2.3 \times 10^{17}$ kg/m³

“Rayon” en termes de force nucléaire forte, de matière ou de charge.

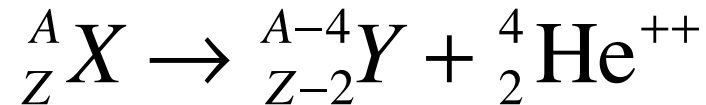
Densité de charge nucléaire (noyaux pas trop légers):

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (12-3)$$

Secs. 12.4, 5 omises (stabilité et force nucléaires)

Sec. 12.6,7 Radioactivité

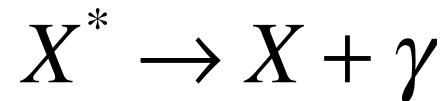
Radiation alpha



Radiation bêta

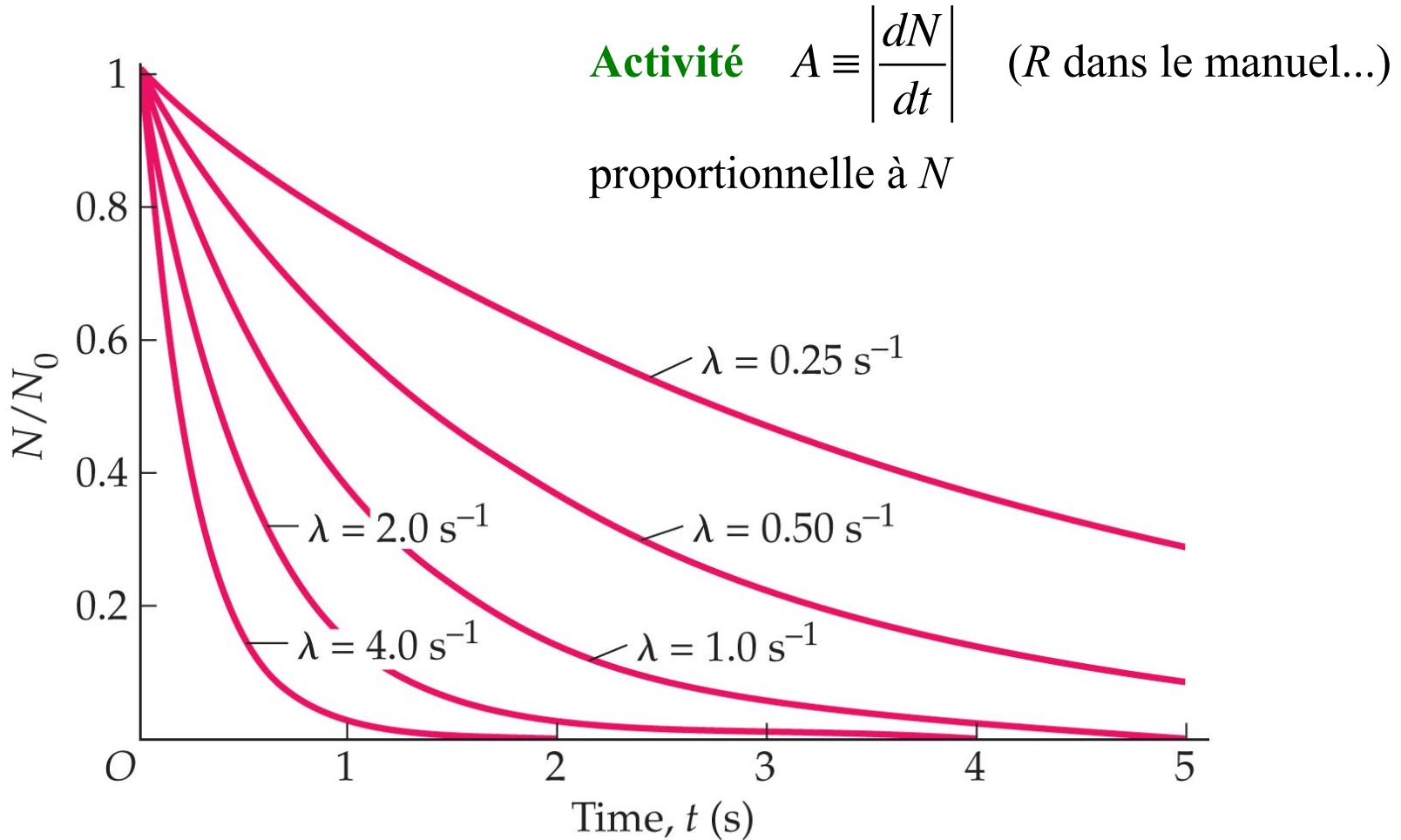


Radiation gamma



Mathématiquement : $\frac{dN}{dt} \propto N \rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N$

Plus λ est grand, plus la décroissance est rapide.



Solution $N = N_0 \exp(-\lambda t) = N_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}\right)$ avec $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

N_0 est la quantité radioactive (masse, nombre de noyaux, etc.) à $t = 0$.

$T_{1/2}$ est la demi-vie, λ est la **constante de désintégration**

On appelle $\tau = 1/\lambda$ la **vie moyenne**

Exemple Le radon a une demi-vie de 3.82 j. Quelle est sa constante de désintégration? (Rép. 0.181 j^{-1})

Exemple Après combien de temps le radon est-il réduit à 3% de son niveau initial? (Rép. 19.3 j)

Exercice #12.27. Un échantillon radioactif de ^{60}Co ($t_{1/2} = 5.271 \text{ an}$) a une activité β de $4.4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$. Combien de grammes de ^{60}Co sont présents? (Rép. $1.05 \mu\text{g}$)

Sec. 12.8 Nuclides radioactifs (section omise)

Sec. 13.1 Réactions nucléaires

Un projectile x frappe un cible X et produit une particule détectée y et un noyau résiduel Y :



Exemple. En 1919, Rutherford a bombardé une cible d'azote avec des particules alpha, puis a observé émission de protons:



Exemples. *Photodésintégration nucléaire* ${}^2\text{H}(\gamma,n){}^1\text{H}$
Capture de proton [${}^9\text{Be}(p,\gamma){}^{10}\text{B}$] *ou neutron* [${}^{16}\text{O}(n,\gamma){}^{17}\text{O}$]

Sec. 13.2 Cinématique de réactions

Nous considérons ici des réactions à basses énergies, avec $K \ll mc^2$.

Soit une réaction $x + X \rightarrow y + Y$ (ou $X(x,y)Y$)



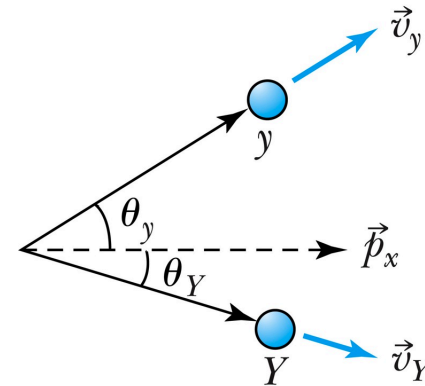
Before

de la conservation d'énergie

$$M_x c^2 + K_x + M_X c^2 = M_y c^2 + K_y + M_Y c^2 + K_Y$$

Valeur Q

$$Q = M_x c^2 + M_X c^2 - (M_y c^2 + M_Y c^2) = K_y + K_Y - K_x$$



After

$Q > 0$: réaction exothermique (exoergique)

$Q < 0$: réaction endothermique (endoergique)

(a)

Exercice #14.4. Pour sonder une autre particule de taille (par ex. diamètre) D , la longueur d'onde de la particule qui sonde doit être $\lambda \leq D$. Pour étudier les détails, la longueur d'onde devrait être nettement inférieure, peut-être aussi petite que $0.10D$. Calculez les énergies cinétiques K d'un électron et d'un proton nécessaires pour sonder les détails d'un neutron, de diamètre environ égal à 1.5 fm.

Sec. 14.4. Symétries et lois de conservation

Physique des particules: domaine de la physique où les symétries jouent un rôle des plus fondamentaux.

Exemples de quantités conservées: quantité de mouvement \mathbf{P} , masse-énergie E , charge électrique Q , moment angulaire \mathbf{L} .

Symétrie invariance dans la dynamique qui correspond à une quantité conservée (théorème d'Emmy Noether (1915)) :

Invariance sous translation spatiale $\rightarrow \mathbf{P}$

Invariance sous translation temporelle $\rightarrow E$

Invariance sous rotation $\rightarrow \mathbf{L}$

Invariance sous changement de jauge $U(1) \rightarrow Q$

En physique des particules, ces lois de conservation déterminent si certains processus ou réactions sont possibles.

Quelques lois de conservations

Nombre de baryons $B = +1$ (baryons), -1 (antibaryons), 0 (autres)

Nombre leptonique $L_e = +1$ (électron, ν_e), -1 (e^+ , anti- ν_e), 0 (autres)

Nombre leptonique $L_\mu = +1$ (muon, ν_μ), -1 (μ^+ , anti- ν_μ), 0 (autres)

Étrangeté (strangeness) S

Hypercharge $Y = B + S$

Exercice #14.13-14. Pourquoi ces réactions sont-elles interdites?

$$(a) \ p + p \rightarrow p + p + n$$

$$(b) \ p + p \rightarrow p + \pi^+ + \gamma$$

$$(a) \ p + \bar{p} \rightarrow \mu^+ + e^-$$

$$(b) \ \gamma + p \rightarrow n + \pi^0$$

$$(c) \ \gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Exercice #14.15. Quelle est l'énergie d'un rayon gamma produit dans la désintégration de Σ^0 ($m = 1193 \text{ MeV}/c^2$) au repos en $\Lambda + \gamma$?

($m_\Lambda = 1116 \text{ MeV}/c^2$)

Table 14.3 The Leptons

Particle Name	Symbol	Anti-particle	Mass (MeV/c ²)	Mean Lifetime (s)	Main Decay Modes
Electron	e^-	e^+	0.511	Stable	
e -Neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< 2.2 \times 10^{-6}$		
Muon	μ^-	μ^+	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
μ -Neutrino	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	< 0.17		
Tau	τ^-	τ^+	1776.8	2.9×10^{-13}	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau, \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$
τ -Neutrino	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	< 15.5		

Review of Particle Physics, K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *Journal of Physics G37*, 075021 (2010)

Exercice #14.8. Ajoutez les neutrinos manquants dans les réactions ou désintégrations suivantes:

(a) $\mu^+ \rightarrow e^+ + ?$

(d) $K^- \rightarrow \mu^- + ?$

(b) $? + p \rightarrow n + e^+$

(e) $? + n \rightarrow p + \mu^-$

(c) $\pi^- \rightarrow \mu^- + ?$