PHYSQ 271 LEC B1 - Introduction à la physique moderne
Examen final - Hiver 2010

Nom SOLUTIONS

Numéro d'étudiant.e ______________________________

Professeur Marc de Montigny
Date, heure Mardi, 27 avril 2010, de 14h00 à 17h00
Lieu Local 260

Instructions

- Ce cahier contient **14 pages**. Écrivez-y directement vos réponses.
- L'examen vaut **45%** de la note finale du cours. Sur les **50 points** disponibles, vous pouvez obtenir un maximum de **45 points**.
- L'examen contient **12 questions** à réponse courte (10 points) et **10 problèmes** (40 points). Vous pouvez obtenir une partie des points même si votre réponse finale est erronée. Expliquez de façon claire et précise, et encadrez votre réponse finale.
- Cet examen est à livre fermé. Vous pouvez utiliser l'aide-mémoire que vous aurez préparé. Vous pouvez utiliser le verso des pages pour vos calculs; je ne les corrigerai pas, sauf si vous m'indiquez de le faire.
- Matériel permis: crayons ou stylos, calculatrices (programmables ou graphiques permises). Les assistants numériques (en anglais, *PDA*s) et tout autre système de communication sont interdits.
- Mettez vos téléphones cellulaires hors circuit.

Si quelque chose n'est pas clair, n'hésitez pas à le demander !

Question 1. Quantification [0.7 point]

Est-ce qu'un système physique dont la *fréquence* est quantifiée est nécessairemnt quantique et possible seulement à l'échelle microscopique? Si non, pouvez-vous en nommer un exemple macroscopique (non-quantique)?

Non. Ondes stationnaires: onde, tuyau (ouvert ou fermé), tambour, eau, etc.

Question 2. Effet photoélectrique [1.0 point]

Expliquez brièvement pourquoi le potentiel d'arrêt, $V_{\max}$, dépend de la longueur d'onde de la lumière et non pas de l'intensité.

$E = hf$, donc $V_{\max}$ proportionnel à $K_{\max}$ proportionnel à hc/λ. L'intensité est reliée au nombre de photoélectrons, pas leur énergie.

Question 3. Rayons X et loi de Bragg [0.8 point]

Un faisceau de rayons X, de longueur d'onde égale à 0.154 nm, est dirigé vers un cristal de silicone. Quand vous accroissez l'angle d'incidence de ces rayons à partir de zéro, vous observez un premier maximum d'interférence lorsque le faisceau fait un angle de 34.5° avec les plans cristallins. Quelle est la distance, en nm, entre deux plans cristallins consécutifs?

$2d\sin\theta = m\lambda$ donne $d = \dfrac{m\lambda}{2\sin\theta} = 0.135944831 \approx 0.136$ nm

Question 4. Effet Compton [0.7 point]

Suite à l'effet Compton, un photon, qui a été diffusé par un électron initialement au repos, a-t-il une longueur d'onde finale plus grande, plus petite, ou égale à celle du photon incident? Expliquez en quelques mots.

$E_{\text{photon}} = \dfrac{hc}{\lambda}$ diminue car de l'énergie est transformée en énergie cinétique de l'électron, donc la longueur d'onde finale est plus grande que celle du photon incident.

Question 5. Dualité onde-corpuscule [0.7 point]

Un électron a une vitesse égale à un proton, dont la masse est environ 1835 fois plus grande que celle de l'électron. La longueur d'onde du proton est-elle plus grande, plus petite ou égale à celle de l'électron?

Si $v_e = v_p$, alors $p_e < p_p$. De $\lambda = h/p$, on voit que $\lambda_e > \lambda_p$. La longueur d'onde du proton est plus petite que celle de l'électron

Question 6. Séries spectrales [1.1 points]

Vous analysez les données d'une expérience de spectroscopie en traçant le graphique $1/\lambda$ en fonction de $1/n_i^2$, où n_i est le niveau d'énergie initial, d'une transition vers le niveau final $n_f = 2$ (série de Balmer). Ce graphique sera une droite. À quelle constante, ou combinaison de constantes, la *pente* de cette droite sera-t-elle égale? (Plusieurs réponses sont possibles.)

$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$ montre que la pente vaut $-R = -\frac{E_R}{hc} = -\frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3 c}$

Question 7. Atomes et masse réduite [0.6 point]

Dans notre analyse de l'atome de Bohr hydrogénoïde, nous avons utilisé le concept de *masse réduite*. De quel phénomène physique la masse réduite tient-elle compte, et qui était négligé auparavant?

Le mouvement du proton autour du centre de masse proton-électron.

Question 8. Fonctions d'onde [0.5 point]

Considérez la fonction d'onde $\psi(x)$ d'un électron. Que représente physiquement la quantité $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$?

Probabilité que l'électron soit à une position x telle que $a < x < b$.

Question 9. Ondes de de Broglie [1.1 points]

Une balle de 0.150 kg se déplace à 30 m/s. Si on essayait d'observer son onde de de Broglie avec la diffraction par une fente de largeur égale à 10^{-15} m, à quel angle (donné par $a\sin\theta = m\lambda$) se trouverait le premier minimum de diffraction?

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{a} = \frac{mh}{a(m_{\text{balle}}v)} = \frac{(1)(6.626\times10^{-34})}{(10^{-15})(0.15\times30)} = 1.472\overline{4}\times10^{-19}\text{, d'où } \theta \approx 8.4\times10^{-18}\text{ degré}$$

Question 10. Principe d'incertitude de Heisenberg [0.8 point]

Quelle est l'incertitude minimale sur l'énergie d'un état quantique dont le temps de vie (en anglais, *lifetime*) est égal à 10^{-8} s?

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 5.25\times10^{-27}\text{ J ou } 3.3\times10^{-8}\text{ eV}$$

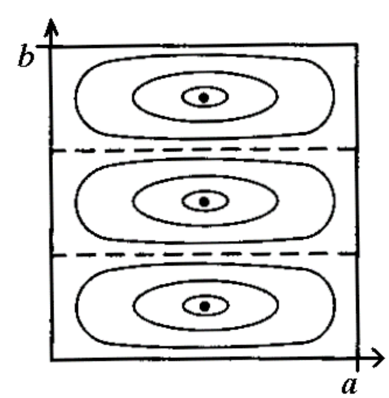
Question 11. Équation de Schrödinger [0.8 point]

Sachant que les deux fonctions ψ_1 et ψ_2 sont des solutions de l'équation de Schrödinger, est-ce que la fonction $\psi = (\psi_1 + \psi_2)^2$ est aussi une solution de l'équation de Schrödinger? Expliquez en quelques mots.

Non. La combinaison des solutions est non-linéaire.

Question 12. Puit infini à deux dimensions [1.2 points]

La figure ci-contre illustre des courbes de niveaux de $|\psi|^2$ d'une particule dans un puit infini à deux dimensions. Si on prend $a = 10^{-11}$ m et $b = 1.5\times10^{-11}$ m, quelles sont les positions où il est le plus probable de trouver cette particule?



$$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{6}\right) = (0.5, 0.25)\times10^{-11}\text{ m}$$

$$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = (0.5, 0.75)\times10^{-11}\text{ m}$$

$$\left(\frac{a}{2},\frac{5b}{6}\right) = (0.5, 1.25)\times10^{-11}\text{ m}$$

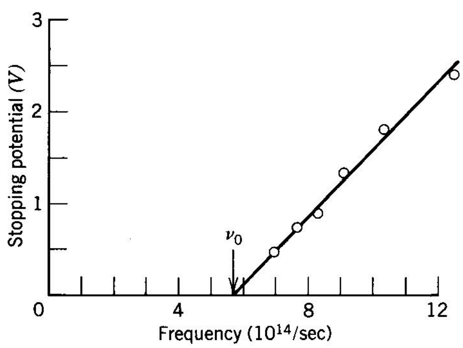
Problème 1. Effet photoélectrique [5.5 points]

En classe, nous avons effectué l'expérience de Millikan sur l'effet photoélectrique. Les mesures expérimentales obtenues par Millikan sont illustrées à la figure ci-dessous. (Facteur de conversion : 1 eV = 1.60×10^{-19} J)

A. Tracez un schéma simple du montage expérimental et expliquez brièvement le principe de fonctionnement de l'expérience et sa contribution à la physique quantique. **[2.5 points]**

B. À partir des résultats ci-dessous, calculez la valeur de la constante de Planck, h, en J·s. **[2.0 points]**

C. Que vaut le travail d'extraction ϕ, en eV, du métal utilisé? **[1.0 point]**



Solution

A. Montage expérimental

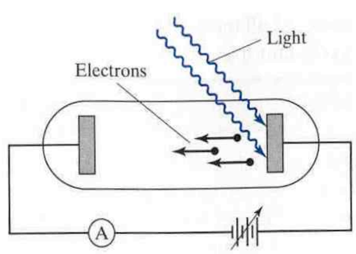


FIGURE 4.2
A photoelectric cell. The applied voltage can be adjusted in magnitude and sign.

La lumière (photons d'énergie $E = hf$) arrache des photoélectrons du métal (travail d'extraction ϕ). Il leur reste l'énergie cinétique $K_{max} = hf - \phi$. K_{max} est mesuré à l'aide d'un potentiel d'arrêt $eV_{max} = K_{max} = hf - \phi$. L'expérience a confirmé le concept de photon.

B. $V = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e}$ montre que $h = e \times \text{pente} = \left(1.6 \times 10^{-19}\right) \frac{2.4 - 0}{(12 - 5.6) \times 10^{14}} \approx 6 \times 10^{-34}$ J s

C. $\phi = hf - eV = \left(6 \times 10^{-34}\right)\left(5.6 \times 10^{14}\right) - 0 \approx 3.36 \times 10^{-19}$ J = 2.1 eV

Problème 2. Atomes de Bohr hydrogénoïdes [5.0 points]

Considérez un atome hydrogénoïde de Ti^{21+}, c.-à-d. un atome de titane dont 21 de ses 22 électrons ont été retirés. Pour l'électron, prenez $m_e c^2$ = 511 keV. Constantes utiles: ke^2 = 1.44 eV·nm et hc = 1240 eV·nm.

A. Quel est le rayon de l'orbite de l'électron dans l'état $n = 3$? **[2.0 points]**
B. Quelle est l'énergie de l'état $n = 3$, en eV? **[1.0 point]**
C. Quelle est la longueur d'onde du photon émis au cours de la transition du niveau $n = 3$ au niveau $n = 1$ de cet atome? **[2.0 points]**

Solution

A. $r = \dfrac{n^2 a_B}{Z} = \dfrac{n^2}{Z} \dfrac{\hbar^2 c^2}{ke^2 m_e c^2} = 2.1653 \times 10^{-2} \approx 0.022 \text{ nm}$

B. $E_n = -\dfrac{Z^2 E_R}{n^2} = -731.3\overline{7} \approx -730 \text{ eV}$

C. $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{Z^2 E_R}{hc}\left(\dfrac{1}{n_f^{\,2}} - \dfrac{1}{n_i^{\,2}}\right) = 4.718566308 \text{ nm}^{-1}$ donne $\lambda \approx 0.21 \text{ nm}$

Problème 3. Principe d'incertitude de Heisenberg [5.0 points]

Le but de cet exercice est d'estimer l'énergie cinétique d'un électron (dont $m_e c^2 = 511$ keV) si on pouvait le confiner dans un noyau de rayon $r \approx 1.0 \times 10^{-14}$ m.

A. En prenant Δx égal au rayon du noyau, quelle est l'incertitude sur la quantité de mouvement de l'électron, en eV/c? ($\hbar = 6.582 \times 10^{-16}$ eV·s) **[1.5 points]**

B. Supposez que la quantité de mouvement d'un électron confiné dans ce noyau soit égale à votre réponse en partie A. En comparant pc avec $m_e c^2$, est-ce que l'électron serait relativiste ou non-relativiste? **[1.0 point]**

C. Quelle est l'énergie relativiste de l'électron, en MeV? **[1.5 points]**

D. Quelle est l'énergie cinétique relativiste, en MeV? **[1.0 point]**

Solution

A. $\Delta p = \dfrac{\hbar}{2\Delta x} = \dfrac{\left(6.582 \times 10^{-16} \text{ eV}\right)}{2\left(10^{-14} \text{ m}\right)} \dfrac{3 \times 10^{8} \text{ m/s}}{c} = 9.873 \times 10^{6} \approx 9.9 \times 10^{6}$ eV/c

B. $pc = 10^7$ eV $>> m_e c^2 = 511$ keV Relativiste

C. $E^2 = (pc)^2 + \left(m_e c^2\right)^2 = \left(9.873 \times 10^6\right)^2 + \left(5.11 \times 10^5\right)^2$

donne $E = 9.88621515 \times 10^6 \approx 9.89 \times 10^6$ eV

D. $K = E - m_e c^2 = 9.88621515 \times 10^6 - 5.11 \times 10^5 = 9.375 \times 10^6 \approx 9.4 \times 10^6$ eV

Problème 4. Électron dans un puit infini [5.5 points]

Considérez un électron ($m_e c^2$ = 511 keV) confiné dans un puit infini de largeur $a \approx 24.0 \times 10^{-10}$ m. L'électron se trouve dans le troisième niveau excité, pour lequel $n = 4$.

A. Écrivez la fonction d'onde en termes de x et a. **[0.5 point]**

B. Tracez un schéma de la densité de probabilité $|\psi_4(x)|^2$. **[0.7 point]**

C. Quelles positions, en m, sont les plus probables? **[1.0 point]**

D. Quelle est la probabilité de trouver l'électron entre $x = 0$ et $x = a/8$? (*Indice* Plutôt que de calculer une intégrale, utilisez le schéma en partie B.) **[1.0 point]**

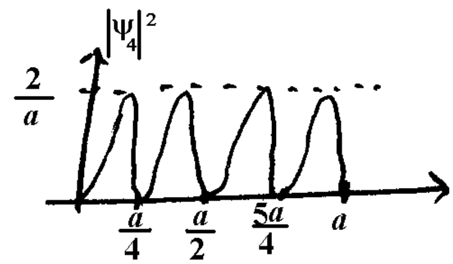
E. Quelles sont les énergies des niveaux n = 1, 2, 3, 4, en eV ? **[1.3 points]**

F. Si l'électron passe du niveau n = 4 au niveau n = 1, quelle est la longueur d'onde du photon émis lors de cette transition? **[1.0 point]**

Solution

A. $\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{4\pi x}{a}$

B. Trois noeud, le max de $|\psi_4(x)|^2$ est $2/a$



C. $\frac{a}{8} = 3\times10^{-10}$ m; $\frac{3a}{8} = 9\times10^{-10}$ m; $\frac{5a}{8} = 15\times10^{-10}$ m; $\frac{7a}{8} = 21\times10^{-10}$ m

D. La surface couvre 1/8 de l'aire totale, qui, elle, vaut 1. Donc 1/8 = 12.5%

E. $E_n = \frac{n^2(hc)^2}{8mc^2a^2} = n^2\overbrace{(0.06529952164)}^{E_1}$ qui donne E_1 = 0.0653 eV, E_2 = 0.261 eV, E_3 = 0.588 eV, E_4 = 1.04 eV.

F. $\frac{1}{\lambda} = \frac{E_1\left(n_i^2 - n_f^2\right)}{hc}$ mène à λ = 1265.96129 nm ≈ 1270 nm ou 1.27 μm

Problème 5. Équation de Schrödinger [2.5 points]

Considérez l'équation de Schrödinger *dépendante* du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}. \tag{1}$$

Si la fonction $\psi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger *indépendante* du temps, $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$, déterminez la valeur de ω, en termes de E, pour laquelle $\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$ sera une solution de l'équation (1).

Solution

$\partial_t\Psi=-i\omega\psi e^{-i\omega t}$

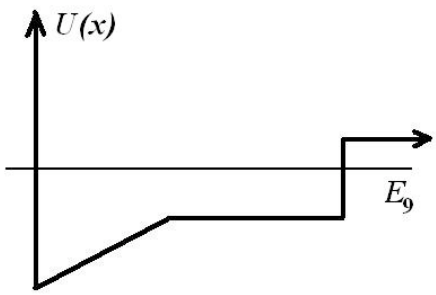
$\partial_{xx}\Psi=\psi''e^{-i\omega t}$

Si on remplace dans l'équation (1), on obtient

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+V(x)\psi(x)}_{E\psi(x)}=i\hbar(-i\omega)\psi(x)=\hbar\omega\psi(x) \text{ d'où } \omega=\frac{E}{\hbar}$$

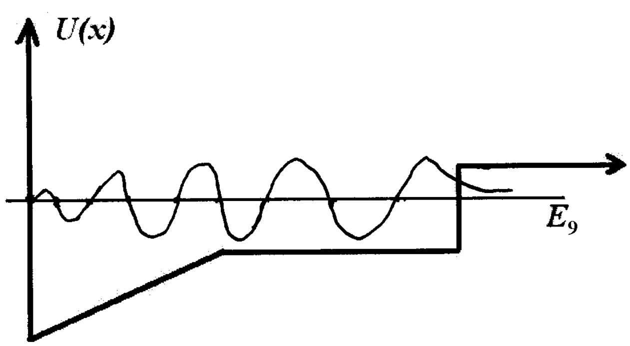
Problème 6. Tracé de fonctions d'onde [3.0 points]

A. Pour le potentiel ci-dessous, faites un tracé qualitatif de la fonction d'onde correspondant au niveau d'énergie E_9. **[2.0 points]**
B. Dans quelle région la probabilité de présence est-elle la plus grande? **[1.0 point]**



Solution

A. 8 noeuds, la longueur d'onde et l'amplitude locales sont constantes à la moitié de droite, puis deviennent plus petites quand on se déplace vers la gauche.



B. Probabilité plus grande aux positions des maxima dans la partie de droite.

Problème 7. Oscillateur harmonique simple [4.5 points]

On donne la solution suivante de l'équation de Schrödinger,

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

pour l'oscillateur harmonique simple, dont le potentiel est $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

A. Si les niveaux d'énergie ont les valeurs $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, utilisez l'équation de Schrödinger pour montrer à quel niveau n correspond la solution ci-dessus? **[2.8 points]**

B. Quelle valeur de A, en termes de m, ω et $\hbar$, permet de normaliser la fonction $\psi(x)$?

Intégrale utile : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\pi^{1/2}}{a}$. **[1.7 points]**

Solution

A. Équation de Schrödinger : $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi$

En dérivant la fonction donnée dans la question, nous trouvons $\psi' = -\frac{m\omega x}{\hbar}\psi$ et

$\psi'' = -\frac{m\omega}{\hbar}\left(1 - \frac{m\omega x^2}{\hbar}\right)\psi$, que l'on remplace dans l'équation de Schrödinger, pour obtenir

$E\psi = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega\psi - \frac{1}{2}m\omega x^2\psi\right) + \frac{1}{2}m\omega x^2\psi = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi$, et $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, qui correspond à $n = 0$.

B. $\int |\psi|^2\,dx = 1$ mène à $\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,dx = A^2\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} = 1$ et $A = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^4$

Problème 8. Puit infini à trois dimensions [3.0 points]

Une particule de masse m est dans une boîte dont les côtés ont des longueurs données par a, b et c. L'énergie de cette particule est donnée par la relation

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^{\ 2}}{a^2} + \frac{n_y^{\ 2}}{b^2} + \frac{n_z^{\ 2}}{c^2}\right).$$

A. Quelle est l'énergie du niveau fondamental, en termes de m, a, b, et c? **[0.6 point]**
B. Si $a = 2b = 4c$, quel est le degré de dégénerescence (c.-à-d. le nombre d'états différents ayant la même énergie) des *cinq* plus bas niveaux d'énergie? **[2.4 points]**

Solution

A. Tous les $n = 1$ $\quad \boxed{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$

B. $b = a/2$ et $c = a/4$ donne $E = \underbrace{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}}_{E_0}\left(n_x^{\ 2} + 4n_y^{\ 2} + 16n_z^{\ 2}\right)$

n_x	n_y	n_z	E/E_0
1	1	1	21
2	1	1	24
3	1	1	29
1	2	1	33
4	1	1	36
2	2	1	36

Niveaux d'énergie $21E_0$, $24E_0$, $29E_0$ et $33E_0$: degré 1; et le niveau $36E_0$ a degré 2.

Problème 9. Moment angulaire de l'atome d'hydrogène [3.5 points]

Considérez les états de l'atome d'hydrogène dont le nombre quantique du moment angulaire est égal à $l = 2$.

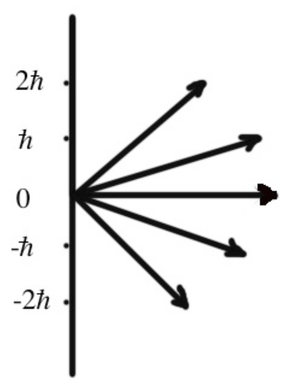
A. Quelle est la plus grande possible de L_z, en termes de $\hbar$? **[0.5 point]**
B. Quelle est la grandeur du vecteur **L**, en termes de $\hbar$? **[1.0 point]**
C. Tracez les vecteurs de moment angulaire qui correspondent aux L_z possibles. **[1.0 point]**
D. Quel est l'angle entre l'axe z et le vecteur **L** le plus proche de cet axe? **[1.0 point]**

Solution

A. $L_z = 2\hbar$

B. $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar \cong 2.45\hbar$

C.



D. $\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{2\hbar}{\sqrt{6}\hbar}$ donne $\theta = 35.26438968° \approx 35.3°$

Problème 10. Nombres quantiques de l'atome d'hydrogène [2.5 points]

Considérez un atome d'hydrogène dont le nombre quantique principal est $n = 3$.

A. Quelles sont toutes les paires possibles de (l, m) ? **[1.0 point]**
B. Quel est le degré de dégénerescence du niveau $n = 3$? **[0.5 point]**
C. Quelle est l'énergie de ces états ? **[1.0 point]**

Solution

A.

l	m
0	0
1	1
1	0
1	-1
2	2
2	1
2	0
2	-1
2	-2

B. 9

C. $E = -\frac{E_R}{n^2} = -\frac{13.6}{3^2} = -1.51 \text{ eV}$

Bon été! Rendez-nous visite l'an prochain!