

PHYSQ 271 LEC A1 - Introduction à la physique moderne
Examen final

Nom _____ **SOLUTIONS** _____

Numéro d'étudiant.e _____

Professeur Marc de Montigny

Horaire Lundi, 10 novembre 2012, de 14 h à 17 h

Lieu Gymnase de la Faculté Saint-Jean, rangée 1

Instructions

- Ce cahier contient **10 pages**. Écrivez-y directement vos réponses.
- L'examen contient **40 points** et vaut 40% de la note finale du cours.
- L'examen contient **18 questions**. Vous pouvez obtenir une partie des points même si votre réponse finale est erronée. Expliquez de façon claire et précise.
- Cet examen est à livre fermé. Vous pouvez utiliser l'aide-mémoire (une feuille recto verso) que vous aurez préparé. Vous pouvez utiliser le verso des pages et la page 10 pour vos calculs.
- Matériel permis: crayons ou stylos, calculatrices (programmables ou graphiques permises). Tout système de communication est interdit. Mettez votre téléphone cellulaire hors circuit.

Si quelque chose n'est pas clair, n'hésitez pas à me le dire !

Question 1. [2.0 points] Photons

L'intensité lumineuse minimale nécessaire pour qu'un oeil la détecte vaut environ $5.00 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$. Si le rayon de la pupille est de 2.50 mm, trouvez

- A. la puissance nécessaire pour qu'un oeil détecte de la lumière, et
- B. à cette intensité, le nombre de photons entrant dans l'oeil par seconde si $\lambda = 500 \text{ nm}$.

A. $P = I\pi r^2 = 9.82 \times 10^{-18} \text{ W}$

B. $\frac{P}{E} = \frac{P}{hc/\lambda} = 25 \text{ photons par seconde}$

Question 2. [3.0 points] Effet photoélectrique

De la lumière dont $\lambda = 300 \text{ nm}$ frappe une plaque de métal et des photoélectrons (masse $511 \text{ keV}/c^2$) en sont éjectés à une vitesse allant jusqu'à $0.002c$.

- A. Quelle est l'énergie cinétique (*non-relativiste*) des photoélectrons émis, en eV ?
- B. Quel est le travail d'extraction de ce métal, en eV ?
- C. Quelle est la longueur d'onde maximale requise pour que des photoélectrons soient émis de ce métal ?

A. $K = \frac{1}{2}mv^2 = 1.02 \text{ eV}$

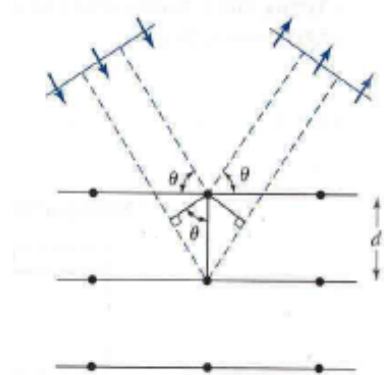
B. $K = \frac{hc}{\lambda} - \phi$ donne $\phi = \frac{hc}{\lambda} - K = 3.11 \text{ eV}$

C. $\lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{\phi} = 399 \text{ nm}$

Question 3. [2.5 points] Diffraction de Bragg

Les plan atomiques d'un cristal, montrés ci-dessous, sont séparés de 0.28 nm. Le maximum de premier ordre pour la diffraction de Bragg forme un angle $\theta = 15^\circ$ par rapport au plan.

- A. Quelle est la longueur d'onde des rayons X utilisés ?
- B. Quels sont les angles des maxima des ordres supérieurs ?



A. $2d \sin \theta = n\lambda, \lambda = \frac{2d}{n} \sin \theta = 0.145 \text{ nm}$

B. $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{n\lambda}{2d} \right) = 31^\circ (n = 2) \text{ et } 51^\circ (n = 3)$

Question 4. [2.0 points] Effet Compton

Dans l'expérience de Compton, des rayons X de longueur d'onde 0.0240 nm sont diffusés par un électron (masse $511 \text{ keV}/c^2$) initialement au repos. Les rayons sont déviés d'un angle de 135° . Quelle sera la longueur d'onde des rayons X diffusés ? Quelle sera l'énergie cinétique de l'électron après la collision ?

$\lambda' = \lambda + \frac{hc}{mc^2} (1 - \cos \theta) = 0.0281 \text{ nm}$ et $K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = 7540 \text{ eV}$

Question 5. [2.0 points] Dualité ondes-corpuscules

Les électrons ont une masse de $511 \text{ keV}/c^2$ et les proton, de $938 \text{ MeV}/c^2$.

- A. Si un proton X a une plus grande vitesse qu'un proton Y, quel proton a la plus grande longueur d'onde de de Broglie ?
- B. Si un proton et un électron ont la même vitesse, lequel a la plus grande longueur d'onde de de Broglie ?
- C. Si un proton et un électron sont accélérés par le même potentiel, qui leur donne des énergies cinétiques égales, lequel a la plus grande longueur d'onde de de Broglie ?

A. De $\lambda = \frac{h}{p}$, la réponse est le proton Y

B. Avec la même relation : l'électron

C. De la relation précédente, et $K = \frac{p^2}{2m}$, on conclut que $p_p > p_e$, et réponse =
électron

Question 6. [3.0 points] Raies spectrales

Considérez les raies spectrales de l'atome d'hydrogène.

- A. Trouvez les trois plus grandes longueurs d'onde dans la série de Paschen ($n = 3$).
- B. Dans quelle partie du spectre électromagnétique sont-elles situées ?
- C. Quelle est la plus petite longueur d'onde dans toute la série de Paschen ?

A. $\lambda_{n'3} = \frac{hc}{\Delta E}$ avec $\Delta E = E_{n'} - E_3 = -13.6 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{3^2} \right)$ donnent

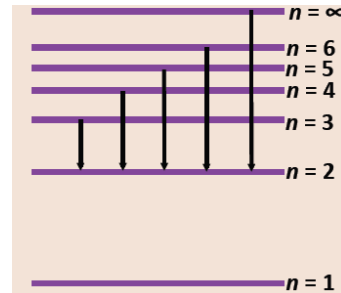
$\lambda_{43} = 1876 \text{ nm}, \lambda_{53} = 1282 \text{ nm}, \lambda_{63} = 1094 \text{ nm}$

B. Dans l'infrarouge

C. Correspond au cas n' infini. Ceci donne $\lambda_{\infty 3} = 821 \text{ nm}$

Question 7. [1.0 point] Transitions atomiques

Parmi les transitions montrées ci-dessous, laquelle produira les photons qui auront la plus grande longueur d'onde ?



de 3 à 2

Question 8. [3.0 points] Atomes de Bohr

Un électron est dans l'état $n = 3$ d'un atome d'hydrogène.

- A. Quelle est la plus grande fréquence que peut avoir un photon émis par transition de cet électron vers un niveau plus bas ?
- B. Quelles sont les fréquences de toutes les autres transitions (vers le bas) possibles ?

A. Transition de E_3 à E_1 . $f_{31} = \frac{E_3 - E_1}{h} = \frac{-1.51 - (-13.6) \text{ eV}}{4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 2.92 \times 10^{15} \text{ Hz}$

B. Transition de E_3 à E_2 , et de E_2 à E_1 . $f_{32} = 4.58 \times 10^{14} \text{ Hz}$ et $f_{21} = 2.48 \times 10^{14} \text{ Hz}$

Question 9. [3.5 points] Atomes hydrogénoïdes

Considérez un atome de lithium Li^{++} doublement ionisé (c.-à-d. $Z = 3$).

- A. Quels sont les quatre plus bas niveaux d'énergie, en eV ?
- B. Quelles sont les trois fréquences les plus élevées émises avec ces quatre niveaux ?
- C. Quelles sont les longueurs d'onde correspondant à vos réponses à la partie B ?

A. $E_n = -\frac{Z^2(13.6 \text{ eV})}{n^2} = -122.4 \text{ eV}, -30.6 \text{ eV}, -13.6 \text{ eV}, -7.65 \text{ eV}$

B. $f = \frac{\Delta E}{h}$ donne $f_{41} = 2.77 \times 10^{16} \text{ Hz}, f_{31} = 2.63 \times 10^{16} \text{ Hz}, f_{21} = 2.22 \times 10^{16} \text{ Hz}$

C. $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$ donne 10.8 nm, 11.4 nm, 13.5 nm

Question 10. [2.0 points] Hypothèse de de Broglie

La diffraction d'électrons de faible énergie (en anglais, *low-energy electron diffraction LEED*) permet l'analyse de cristaux dont les plans atomiques ont une séparation semblable à la longueur d'onde du faisceau d'électrons (masse $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, charge $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$).

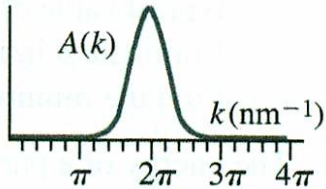
- A. Quelle est la vitesse des électrons requise pour analyser un cristal dont les plans atomiques sont séparés de 0.2 nm ?
- B. Si un faisceau d'électrons est accéléré par des plaques chargées, quel potentiel V permettra d'obtenir cette vitesse ?

A. $p = mv = \frac{h}{\lambda}$ donne $v = 3.63 \times 10^6 \text{ m/s}$

B. $eV = \frac{1}{2}mv^2$ donne $V = 37.5 \text{ V}$

Question 11. [1.5 point] Principe d'incertitude

La figure ci-dessous illustre la transformée de Fourier $A(k)$ d'un paquet d'ondes gaussien (qui n'est pas montré). En utilisant cette figure et le principe d'incertitude, déterminez approximativement la largeur (en mètres) du paquet d'ondes correspondant.



Le pic est à $k \pm \Delta k \approx 2\pi \pm \pi$, donc $\Delta k \approx \pi$

$$\Delta x \approx \frac{1}{2\Delta k} = \frac{1}{2(\pi \text{ nm}^{-1})} = 0.159 \text{ nm} = 1.59 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Question 12. [1.5 point] Principe de Heisenberg

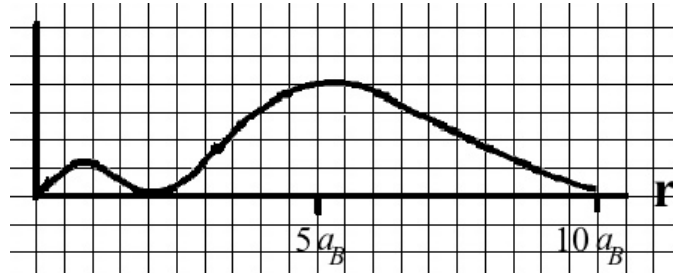
Un électron peut passer d'un niveau atomique à un niveau plus bas, puis de ce niveau à un autre niveau, encore plus bas. L'énergie perdue par l'atome à chaque saut est transférée au photon émis. Si un électron occupe un niveau pendant 1 nanoseconde (10^{-9} s), quelle est l'incertitude minimale sur l'énergie de l'électron ?

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = 5.25 \times 10^{-26} \text{ J} = 3.28 \times 10^{-7} \text{ eV}$$

Question 13. [2.5 points] Fonction d'onde

La figure ci-dessous représente le carré $|\psi|^2$ de la fonction d'onde d'un électron dans une orbitale de l'atome d'hydrogène. Quelle est *approximativement* la probabilité que cet électron se trouve entre

- A. $r = 0$ et $r = a_B$?
- B. $r = 4a_B$ et $r = 8a_B$?



Il y a env. 35 carreaux sous la courbe.

- A. 1.5 carreaux donne $P = 1.5/35 \approx 4\%$
- B. 25 carreaux donne $P = 27/35 \approx 71\%$

Question 14. [1.5 point] Équation de Schrödinger relativiste ?

Nous avons vu que l'équation de Schrödinger est obtenue en remplaçant les observables E et p par $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ et $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, respectivement, dans l'équation $E = \frac{p^2}{2m} + U$, agissant sur une fonction d'onde. Quelle équation différentielle obtiendrez-vous si vous remplacez plutôt ces opérateurs dans l'équation de la dynamique relativiste $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$? (L'équation obtenue ainsi s'appelle *équation de Klein-Gordon*.)

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Psi = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 c^2 \Psi + m^2 c^4 \Psi, \text{ qui donne } -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + m^2 c^4 \Psi$$

Question 15. [2.0 points] Puit de potentiel infini

Un électron (masse $511 \text{ keV}/c^2$) est enfermé dans un puits de potentiel infini de largeur égale à 0.1 nm .

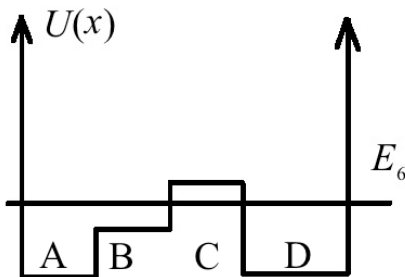
- A. Quels sont les trois premiers niveaux d'énergie, en eV ?
- B. Quelle est la longueur d'onde du photon émis lors de la transition de l'électron du niveau $n = 2$ vers l'état fondamental ?

A. $E = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)a^2} = 37.6 \text{ eV}, 150 \text{ eV}, 339 \text{ eV}$

B. $\lambda = \frac{hc}{E_{21}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{(151 - 37.6) \text{ eV}} = 11.0 \text{ nm}$

Question 16. [2.0 points] Tracé qualitatif d'une fonction d'onde

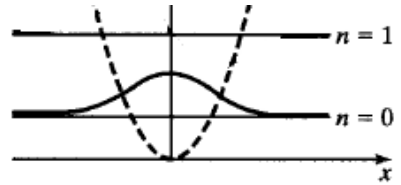
La figure ci-dessous représente le potentiel dans lequel se trouve une particule. Faites un tracé qualitatif de la fonction d'onde correspondant au niveau d'énergie E_6 montré ci-dessous. Indiquez dans quelle région on a la plus petite probabilité de trouver la particule.



La fonction d'onde contient $6 - 1 = 5$ noeuds. La longueur d'onde et l'amplitude de l'oscillation sont plus petites dans les régions creuses (extrémités gauche et droite) que dans la 2^e région de gauche. Dans la partie la plus élevée C, il n'y a pas d'oscillation, mais l'onde est atténuée ; c'est la région où la probabilité de présence est la plus petite.

Question 17. [3.0 points] Oscillateur harmonique quantique

Considérez la fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, montrée ci-dessous, donnée par $\psi_0(x) = (\pi b^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)$, où $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$. Quand une particule se trouve dans l'état fondamental, quelle est la probabilité que cette particule se trouve dans l'intervalle $0 \leq x \leq b$? (Indices : utilisez le changement de variable $y = \frac{x}{b}$, et l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} \exp(-y^2) dy = 1.49$)



$$P(0 \leq x \leq b) = \frac{1}{2} P(-b \leq x \leq b) = \frac{1}{2} \int_{-b}^b |\psi_0|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx$$

Avec $y = \frac{x}{b}$, on trouve

$$P(0 \leq x \leq b) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}} \exp(-y^2) b dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}} b \underbrace{\int_{-1}^1 \exp(-y^2) dy}_{1.49} = \frac{1}{2} \left(\frac{1.49}{\sqrt{\pi}} \right) = 42\%$$

Question 18. [2.0 points] Puits infini en deux dimensions

Considérez un puits infini dont les côtés sont de longueurs égales à a et $b = 2a$. Faites un tableau illustrant les nombres quantiques n_x et n_y des six plus bas niveaux d'énergie, en indiquant les énergies (en termes de \hbar , la masse m et la longueur a) et les degrés de dégénérescence, s'il y a lieu.

Avec $E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} (4n_x^2 + n_y^2)$ et $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$, on obtient

n_x	1	1	1	2	1	2	2
n_y	1	2	3	1	4	2	3
E	$5E_0$	$8E_0$	$13E_0$	$17E_0$	$20E_0$	$20E_0$	$25E_0$
dég.	1	1	1	1	2	2	1

Page vide pour vos calculs

Joyeuses Fêtes !

